Министерство образования и науки Российской Федерации Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА МАЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА

Методические указания к лабораторной работе № 9 по физике

Екатеринбург УрФУ 2012 УДК 531.15:531.53 (076.5)

Составители: В. Б. Демин, В. П. Левченко, К. А. Шумихина, А. Г. Волков Научный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. А. А. Повзнер

Изучение законов вращательного движения на маятнике Обербека : методические указания к лабораторной работе № 9 по физике / сост. В. Б. Демин, В. П. Левченко, К. А. Шумихина, А. Г. Волков. – Екатеринбург : УрФУ, 2012. – 19 с.

Теоретическая часть содержит общие сведения о механике вращательного движения, основных законах динамики, некоторых характеристиках, в частности моменте силы и моменте инерции. Экспериментальная часть включает описание лабораторной установки, конкретных задач, методик измерений и обработки результатов. Приведена форма отчета.

Указания предназначены для студентов всех специальностей всех форм обучения.

Рис. 5. Прил. 2.

Подготовлено кафедрой физики

© Уральский федеральный

университет, 2012

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основное уравнение вращательного движения имеет вид

$$\vec{M} = I\vec{\epsilon},\tag{1}$$

где \vec{M} – суммарный момент всех внешних сил относительно оси вращения;

I – момент инерции тела относительно этой же оси;

έ – угловое ускорение тела.

Момент силы \vec{F} , действующей на тело относительно оси вращения, определяется по формуле



$$M = lF_{\perp}, \qquad (2)$$

где F_{\perp} – проекция силы \vec{F} на плоскость, перпендикулярную к оси вращения; l – плечо силы – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы (рис.1).

Рис. 1. Пример определения момента силы

Момент инерции материальной точки относительно оси вращения равен

произведению массы *m* точки на квадрат расстояния *r* до этой оси:

$$I = mr^2. (3)$$

Вычисление момента инерции твердого тела относительно оси вращения проводится по формуле

$$I = \int r^2 dm = \int \rho \cdot r^2 dV \,,$$

где dm и dV – элемент массы и объема тела, находящийся на расстоянии r от оси вращения; ρ – плотность тела в месте расположения элемента dV.

Если тело однородно, т. е. его плотность ρ одинакова по всему объему, то

$$I = \rho \int r^2 dV. \tag{4}$$

Момент инерции твердого тела зависит от распределения массы относительно оси вращения и является величиной аддитивной. Он определяет инертность твердого тела при вращении.

Вычисление момента инерции твердого тела произвольной формы относительно некоторой оси вращения представляет собой довольно громоздкую в математическом отношении задачу. Экспериментально его можно определить различными методами. Один из этих методов рассматривается в настоящей лабораторной работе.

2. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И ВЫВОД ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ



На рис. 2 схематически изображен так называемый маятник Обербека, с помощью которого можно изучать законы вращательного Обербека движения. Маятник состоит ИЗ вертикальной стойки С со шкалой D, в верхней части которой крепятся крестовина K и шкивШ, жестко насаженные на горизонтальную ось О, закрепленную на двух подшипниках.

На шкив намотана тонкая нить, один конец которой укреплен на шкиве, а к другому привязана платформа Π известной массы m_0 , служащая для размещения перегрузков массой m_n каждый. Шкив с крестовиной могут свободно вращаться вокруг оси O. На крестовине надеты 4 цилиндра Γp .

Момент инерции установки можно изменить, перемещая одинаковые цилиндрические грузы *Гр* вдоль стержней крестовины.

Рис. 2. Эскиз установки

Платформа *П* перед началом опытов помещается на площадку *A*, удерживаемую в горизонтальном положении электромагнитом *Э*.

Внизу на стойке укреплена горизонтальная финишная площадка *Б*, служащая размыкателем электрической цепи установки, управляющей работой электромеханического секундомера.

Уравнение вращательного движения маятника (1) в проекциях на ось *OZ* (рис. 3) имеет вид

$$M - M_{\rm TD} = I\varepsilon, \tag{5}$$

где M – момент силы натяжения \vec{T}_1 нити; $M_{\rm Tp}$ – момент сил трения, действующих на ось маятника со стороны подшипников; I – момент инерции маятника относительно оси вращения; ε – угловое ускорение маятника.

Поскольку масса нити мала и нить практически нерастяжима, натяжение нити одинаково во всех точках ($T_1 = T_2 = T$) и ускорение всех элементов нити одинаково. Момент силы натяжения нити равен

$$M = rT. (6)$$

В этой формуле *r* – плечо силы *T*, равное радиусу шкива.

Силу натяжения *T* нити найдем из второго закона Ньютона для опускающегося груза, записанного в проекциях на ось *OY* :

$$mg - T = ma$$
,

откуда

$$T = m \left(g - a \right), \tag{7}$$

где а – ускорение опускающегося груза;

g – ускорение свободного падения;

т – масса опускающегося груза, равная в общем случае

$$m = m_0 + N \cdot m_n$$
.

Здесь *m*₀- масса платформы;

m_n – масса одного перегрузка;

N – число перегрузков массы *m_n*, установленных на платформе.



Рис. 3. Схема распределения сил

действующие Поскольку на тела системы силы можно считать вращение постоянными, шкива маятника И поступательное движение опускающегося груза можно считать равноускоренными, следовательно, ускорение а опускающегося груза можно найти из уравнения равноускоренного движения $h_1 = at^2 / 2$, если измерено время *t* опускания груза с высоты h_1 (рис. 2):

$$a = \frac{2h_1}{t^2}.$$
(8)

Подставив выражение (8) в (7), а затем формулу (7) в (6), получим

$$M = r \cdot m \cdot (g - \frac{2h_1}{t^2}).$$

Выражая радиус r шкива через его диаметр d(r = d / 2), имеем

$$M = \frac{md}{2}(g - \frac{2h_1}{t^2}).$$
 (9)

Модуль є углового ускорения вращающейся системы связан с модулем a тангенциального ускорения внешних точек шкива соотношением $\varepsilon = a/r = 2a/d$. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{4h_1}{dt^2} \,. \tag{10}$$

Задача 1. Проверка основного закона динамики вращательного движения

В этой задаче предлагается определить графически момент инерции I_0 шкива и крестовины без цилиндров и момент $M_{\rm rp}$ сил трения, убедившись предварительно в линейной зависимости $M = f(\varepsilon)$.

Изменяя массу m опускающегося груза и соответственно время t его опускания, можно варьировать величины углового ускорения ε и момента M силы натяжения нити. С учетом знаков проекций векторов на ось ОZ (рис. 3) и в соответствии с формулами (1) и (5) выполняется следующая зависимость:

$$M = M_{\rm TD} + I_0 \varepsilon$$
.

По графику этой зависимости при неизмененных *I*₀ и *M*_{тр} можно найти их значения.

1. С помощью линейки \mathcal{A} , укрепленной на стойке прибора, измерить высоту h_1 опускания груза.

2. Намотать нить плотно, виток к витку в один слой на шкив, вращая крестовину против часовой стрелки так, чтобы платформа Π (рис. 2) находилась на столике A, а нить была натянута и расположена вертикально.

3. Нажать на правую пусковую кнопку электросекундомера. Одновременно с включением секундомера опускается стартовый столик *A* и груз начинает падение. После удара груза о финишную площадку *Б* происходит автоматическая остановка секундомера, показания которого необходимо внести в табл. П. 2.

7

4. Повторить операции 2–3 еще 2 раза. Найти среднее значение времени падения.

5. Проделать операции 2–3 с другими грузами (по 3 раза с каждым грузом):

$$m_0 + m_n$$
; $m_0 + 2m_n$; $m_0 + 3m_n$; $m_0 + 4m_n$.

6. Усреднить время опускания грузов, рассчитать ε по формуле (10), *M* – по формуле (9) и внести их значения в табл. Π. 2.

7. На компьютере (или миллиметровой бумаге) построить график $M(\varepsilon)$ (рис. 4). По графику определить момент инерции I_0 шкива и крестовины без цилиндров (тангенс угла наклона прямой) и момент $M_{\rm rp}$ силы трения (начальная ордината)¹.



Рис. 4. Примерный вид графика функции *М*(ε)

Задача 2. Определение момента инерции системы четырех цилиндров, симметрично расположенных относительно оси вращения

¹ При построении графика на компьютере, рекомендуется использование метода наименьших квадратов.

Получим формулу для расчета момента инерции системы. Когда опускающийся груз находится в крайнем верхнем положении *1* (рис. 2), энергия системы «шкив – крестовина – опускающийся груз» определяется лишь потенциальной энергией этого груза:

$$W = mgh_{\rm l} \,. \tag{11}$$

В крайнем нижнем положении 2 (рис. 2) потенциальная энергия груза равна нулю, и энергия системы определяется ее кинетической энергией

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$
 (12)

где *I* – момент инерции маятника;

ω – угловая скорость шкива в момент времени *t*;

v – линейная скорость груза в положении 2.

Пройдя путь h_1 , груз не останавливается, так как шкив и крестовина продолжают вращаться по инерции, а после удара о площадку *Б* поднимается на некоторую высоту h_2 (положение 3, рис. 2). Энергия W_3 системы в этом положении определяется потенциальной энергией груза на высоте h_2 :

$$W_3 = mgh_2. \tag{13}$$

Механическая энергия системы не сохраняется в силу того, что в ней действуют неконсервативные силы трения: $W_3 < W < W_1$. Превращение механической энергии системы равно работе сил трения.

Полагая, что $M_{\rm Tp} = {\rm const}$ (на самом деле $M_{\rm Tp} \neq {\rm const}$, особенно в начале движения – из-за застоя), имеем:

$$W_2 - W_1 = -M_{\rm Tp} \phi_1,$$
 (14)

$$W_3 - W_2 = -M_{\rm TP} \phi_2,$$
 (15)

где ϕ_1 и ϕ_2 – угловые пути, пройденные вращающейся частью маятника соответственно за время опускания и подъема груза и связанные с

соответствующими числами оборотов N_1 и N_2 шкива и высотами h_1 и h_2 соотношениями:

$$\varphi_1 = 2\pi N_1 = 2\pi \frac{h_1}{\pi d} = \frac{2h_1}{d}; \qquad \varphi_2 = 2\pi N_2 = \frac{2h_2}{d} \quad .$$
(16)

Сложив выражения (14) и (15), получим

$$-W_1 + W_3 = -M_{\rm Tp}(\phi_1 + \phi_2).$$
 (17)

Подставив формулы (11), (13) и (16) в уравнение (17), имеем

$$-mgh_1 + mgh_2 = -\frac{2M_{\rm TP}}{d}(h_1 + h_2),$$

откуда

$$M_{\rm Tp} = \frac{mgd}{2} \cdot \frac{(h_1 - h_2)}{(h_1 + h_2)}.$$
 (18)

Подставив (11) и (12) в (14), получим

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - mgh_1 = -M_{\rm Tp}\phi_1.$$
 (19)

Движение груза между положениями 1 и 2, как уже отмечалось, равноускоренное, следовательно, $v = at; h_1 = at^2 / 2$, откуда $v = \frac{2h_1}{t}$ и $\omega = \frac{4h_1}{td}$.

Заменяя в формуле (19) $M_{\rm Tp}$, v, W и ϕ_1 соответствующими выражениями, находим момент инерции вращающейся системы

$$I = \frac{md^2}{4} \left[\frac{gh_2 t^2}{h_1(h_1 + h_2)} - 1 \right].$$

Во всех практических случаях единицей можно пренебречь по сравнению с первым слагаемым в квадратных скобках, тогда

$$I = \frac{md^2}{4} \cdot \frac{gh_2 t^2}{h_1(h_1 + h_2)}.$$
 (20)

Таким образом, для определения I необходимо экспериментально определить m, d, t, h_1 и h_2 .

1. На крестовине укрепить четыре одинаковых цилиндра массой m_1 каждый на равных расстояниях от оси вращения. Рекомендуется следующая последовательность установки: одну пару стержней располагают горизонтально, надевают на них два цилиндра на некотором расстоянии от оси вращения, добиваются равновесия системы и закрепляют цилиндры. Линейкой измеряют расстояние 2 *R* (рис. 5).



Затем поворачивают крестовину на 90°, на таком же расстоянии устанавливают еще два цилиндра.

2. Установить на платформе несколько перегрузов (три или четыре), намотать шкив, вращая его нить на против часовой стрелки, И измерить время t движения платформы до ee удара о площадку Б.

3.

He

останавливая

Рис. 5. Схема расположения цилиндров на крестовине

вращения крестовины, определить по линейке \mathcal{A} , укрепленной на стойке C, высоту h_2 , до которой поднимается платформа (отсчет h_2 вести по нижнему основанию платформы).

4. Повторить опыт еще 4 раза, *не меняя числа* перегрузков на платформе. Результаты измерений занести в табл. П. 3.

11

5. По формуле (20) рассчитать момент инерции I вращающейся системы и, используя найденное в предыдущей задаче значение момента инерции I_0 шкива и крестовины, определить момент инерции I_1 четырех цилиндров относительно оси вращения.

6. Рассчитать теоретическое значение момента инерции системы четырех цилиндров относительно оси вращения, считая их материальными точками, по формуле $I_2 = 4m_1R^2$, где m_1 – масса каждого цилиндра, укрепленного на крестовине; R – расстояние от оси вращения до центра масс каждого цилиндра. Полученный теоретический результат сравнить с экспериментальным значением.

ПРИЛОЖЕНИЕ

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра физики

отчет

по лабораторной работе №9

«Изучение законов вращательного движения на маятнике Обербека»

Студент(ка)		

Группа_____

Преподаватель_____

Дата_____

1. Расчетные формулы:

1.1. Момент силы натяжения нити

$$M = \frac{\langle d \rangle m}{2} (g - \frac{2h_1}{\langle t \rangle^2}),$$



1.2. Угловое ускорение маятника

$$\varepsilon = \frac{4h_1}{\langle d \rangle \langle \langle t \rangle^2}.$$

1.3. Момент инерции маятника (используется в задаче 2)

$$\langle I \rangle = \frac{m < d >^2 g < t >^2 < h_2 >}{4h_1(h_1 + < h_2 >)},$$

где $m = m_0 + Nm_{\pi}; < h_2 > -$ _____

2. Эскиз установки.



3. Средства измерений и их характеристики.

Таблица П. 1

Наименование средства измерения	Предел	Цена	Предел основной
и его номер	измерения или	деления	погрешности,
	номинальное	шкалы	$\theta_{ m och}$
	значение		
Маятник Обербека:			
-линейная шкала			
-электросекундомер			
Штангенциркуль или линейка			

Установка № …

4. Результаты измерений.

Задача 1. Определение момента инерции І₀ вала и крестовины без цилиндров

и момента сил трения

4.1. Массы платформы *m*⁰ перегрузков *m*^{*n*} и их погрешности приводятся в таблице, прилагаемой к установке:

 $m_0 = \dots$ $\Gamma;$ $\Delta_{m_0} = \dots$ $\Gamma;$ $m_{\Pi} = \dots$ $\Gamma;$ $\Delta_{m\Pi} = \dots$ $\Gamma.$

4.2. Измерение высоты опускания груза:

$$h_1 = \dots \quad \text{см} ; \Delta_{h_1} = 0,5 \text{ см}.$$

4.3. Измерение диаметра шкива (диаметр шкива и погрешность Δ_d могут быть

заданы преподавателем): $\langle d \rangle = \dots$ мм; $\Delta_{\langle d \rangle} = \dots$ мм.

4.4. Измерение времени опускания груза, расчет є и М.

Таблица П. 2

Масса опускающегося груза, г	тo	$m_1 = m_o + m_n$	$m_2 = m_o + 2m_n$	$m_3 = m_o + 3m_n$	$m_4 = m_o + 4m_n$
Время опускания груза t, с					
<i><t></t></i> , c					
Угловое ускорение ε , рад/с ²					
Момент силы натяжения					
$M, \operatorname{H·M}$					

4.5. Построение графика $M(\varepsilon)$ (прилагается к отчету), определение I_0 и $M_{\rm Tp}$:

 $I_0 =$

 $M_{\rm Tp} =$

Примечание. Расчет *I*₀ и *M*_{тр} может быть выполнен с использованием метода наименьших квадратов (МНК).

4.6. Расчет границ погрешностей результатов измерений.

а) если использовался метод МНК (обработка результатов на компьютере)

$$\mathcal{E}_{I_0} = ; \qquad \mathcal{E}_{M_{\mathrm{TP}}} =$$

б) если метод МНК не использовался, доверительные границы случайных погрешностей рассчитываются по формулам

$$\varepsilon_{I_0} = t_{P,n} \cdot S_{< I_0 >} = \qquad \qquad ; \qquad \varepsilon_{M \mathrm{TP}} = t_{P,n} \cdot S_{< M \mathrm{TP} >}, =$$

где средние квадратические отклонения $S_{<I_0>}$ и $S_{<M{
m rp}>}$ задаются преподавателем,

 $t_{P,n}$ – коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности P = 0.95 и числе наблюдений *n* (в нашем случае n = 3).

Неисключенными систематическими погрешностями пренебрегаем. Следовательно,

$$\begin{split} \Delta_{I_0} &= \varepsilon_{I_0} \, ; \\ \Delta_{M\mathrm{TP}} &= \varepsilon_{M\mathrm{TP}} \, . \end{split}$$

4.7. Окончательные результаты:

$$I_0 = \left(\left\langle I_0 \right\rangle \pm \Delta_{I_0} \right) = (\dots \pm \dots) \quad \text{KF} \cdot \text{M}^2, \qquad P = 0.95;$$
$$M_{\text{TP}} = \left(\left\langle M_{\text{TP}} \right\rangle \pm \Delta_{M_{\text{TP}}} \right) = (\dots \pm \dots) \quad \text{H} \cdot \text{M}, \qquad P = 0.95$$

4.8. Выводы.

Задача 2. Определение момента инерции системы четырех цилиндров, симметрично расположенных относительно оси вращения

4.9. Измерение массы цилиндра *m*₁ (приводится в таблице, прилагаемой к установкам) и массы *m* падающего груза:

 $m_1 = \ldots \Gamma; \qquad \Delta_{m1} = \ldots \Gamma.$

 $m = m_0 + N \cdot m_{\Pi}$ (рекомендуется N = 4).

4.10. Измерение расстояния *R* от оси вращения до центра тяжести цилиндра на крестовине:

$$R = \ldots$$
 cm; $\Delta_R = 1, 1\sqrt{\theta_{och}^2 + \theta_{orc}^2} = \ldots$ cm.

4.11. Измерение времени t опускания груза и высоты h_2 его подъема.

Таблица П. 3

№ п/п	t_i , c	$t_i - , c$	$(t_i - \langle t \rangle)^2, c^2$	h_{2i} , см	$h_{2i} - < h_2 >,$ cm	$(h_{2i} - < h_2 >)^2,$ cm ²

$$< t > = ...$$
 c; $\sum_{i=1}^{n} (t_i - < t >)^2 = ...$ c²;
 $< h_2 > = ...$ cm; $\sum_{i=1}^{n} (h_{2i} - < h_2 >)^2 = ...$ cm²

Средние квадратические отклонения $S_{<t>}$ и $S_{<h>}$:

$$S_{} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \langle t \rangle)^2}{n(n-1)}} = \dots \quad c; \quad S_{} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (h_{2i} - \langle h_2 \rangle)^2}{n(n-1)}} = \dots \quad cm.$$

Доверительные границы случайных погрешностей (P = 0.95):

$$\varepsilon_t = t_{P,n} S_{} = \dots c; \qquad \varepsilon_{h_2} = t_{P,n} S_{} = \dots cM$$

Границы систематической и полной погрешности:

$$\theta_t = \theta_{\text{och}} = \dots \quad \text{c}; \qquad \theta_{h_2} = \theta_{\text{och}} = 0,5 \text{ cM};$$
$$\Delta_t = \sqrt{\theta_t^2 + \varepsilon_t^2} = \dots \quad \text{c}; \quad \Delta_{h_2} = \sqrt{\theta_{h_2}^2 + \varepsilon_{h_2}^2} = \dots \quad \text{cM}.$$

4.12. Вычисление момента инерции <*I* > крестовины с четырьмя цилиндрами по формуле п. 1.3:

$$\langle I \rangle =$$
 _____ = KT·M².

4.13. Расчет момента инерции < *I*₁ > четырех цилиндров:

$$< I_1 > = < I > - < I_0 > = \dots$$
 KG·M².

4.14. Вычисление границы относительной погрешности определения І:

$$\gamma_{I} = \frac{\Delta_{I}}{\langle I \rangle} = \sqrt{\frac{\left(2h_{1} + h_{2}\right)^{2}}{\left(h_{1} + h_{2}\right)^{2}}} \left(\frac{\Delta_{h1}}{h_{1}}\right)^{2} + \frac{\Delta_{h1}^{2}}{\left(h_{1} + h_{2}\right)^{2}} + \left(\frac{\Delta_{h2}}{h_{2}}\right)^{2} + 4\left(\frac{\Delta_{t}}{t}\right)^{2} + 4\left(\frac{\Delta_{d}}{d}\right)^{2} + \left(\frac{\Delta_{m}}{m}\right)^{2},$$
где $\Delta_{m} = 0,2$ г.

$$\gamma_I = \sqrt{$$

4.15. Граница абсолютной погрешности определения І равна

$$\Delta_I = \gamma_I < I > = \dots \qquad \text{Keg} M^2.$$

4.16. Граница относительной погрешности результата измерения момента инерции *I*₁ четырех цилиндров вычисляется по формуле

$$\gamma_{I_1} = \frac{\Delta_{I_1}}{\langle I_1 \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\Delta_{I_0}}{\langle I_0 \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_I}{\langle I \rangle}\right)^2} = \dots$$

4.17. Граница абсолютной погрешности результата измерения равна

$$\Delta_{I_1} = \gamma_{I_1} < I_1 > = \dots \quad \text{Keg} M^2.$$

4.18. Окончательный результат:

$$I_1 = (\langle I_1 \rangle \pm \Delta_{I_1}) = (\dots \pm \dots) \quad \text{Kr·m}^2, \quad P = 0.95.$$

4.19. Вычисление теоретического значения момента инерции четырех цилиндров относительно оси вращения в предположении, что они являются материальными точками:

$$I_2 = 4m_1R^2 = \dots \quad \text{Kr} \cdot \text{M}^2.$$

где *m*₁ – масса цилиндра; *R* – расстояние от оси вращения до центра тяжести цилиндра, расположенного на крестовине.

4.20. Сравнение результата *I*₂ с полученным из опыта *I*₁ и оценка относительной погрешности, возникающей при допущении, что цилиндры являются материальными точками:

$$\delta = \left[\frac{ -I_2}{}\right] \cdot 100 \ \%. = \ \dots$$

4.21. Выводы.

Учебное издание

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА МАЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА

Составители: Демин Владимир Борисович Левченко Виталий Петрович Шумихина Кямаля Арифовна Волков Аркадий Германович

Редактор В. И. Новикова Компьютерный набор Н. Н. Суслиной

Подписано в печать « » 20 г. Формат 60×84 1/16. Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 1,1. Уч.-изд. л. 0,8. Тираж 100 экз. Заказ

> Редакционно-издательский отдел УрФУ 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19 E-mail: rio@ustu.ru

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра УрФУ 620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4 Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13 Факс: +7 (343) 358-93-06 E-mail.: press.info@usu.ru