А.Г.Волков

Физика: Механика и элементы специальной теории относительности

Модуль №1
Рабочая тетрадь

для студентов, обучающихся по дистанционной технологии

Научный редактор проф., д-р физ.-мат. наук А.А.Повзнер

Екатеринбург 2006

ББК 22.3721

УДК 373:53

Рецензенты: проф., д.ф.-м.н. И.Г.Коршунов

к.ф.-м.н. Ю.П.Сухоруков

к.т.н. В.В.Лобанов

Авторы: А.Г.Волков

Физика: Механика и элементы специальной теории относительности:

Учебное пособие: Рабочая тетрадь / А.Г.Волков. Екатеринбург: ООО “Изд-во УМЦ УПИ”, 2006, 57 с.

Учебное пособие представляет собой сборник задач по разделам «Механика» и «Специальная теория относительности» курса общей физики, читаемого студентам УГТУ-УПИ. Оно содержит как примеры решения задач, так и задачи для самостоятельного решения. Кроме того, в пособие представлены основные физические законы и соотношения, необходимые для решения задач, а также сформулированы алгоритмы решения основных их типов.

Подробное изложение решений задач и их анализа, принятое в пособии, допускает самостоятельное его изучение. Однако ни в коей мере не исключает «живого» общения с преподавателем, а предназначено для его интенсификации.

Пособие составлено в соответствии с программой курса «Общая физика» и отвечает всем требованиям, принятым на кафедре физики УГТУ-УПИ.

Для студентов УГТУ-УПИ всех специальностей и всех форм обучения.

Рис.24. Табл.2.

Подготовлено кафедрой физики УГТУ

Введение

Чтобы решить физическую задачу (как в прочем и любую другую) необходимо составить одно или несколько уравнений, связывающих между собой неизвестные (искомые) и известные величины. Такие уравнения могут быть записаны, прежде всего, из физических законов и определений физических величин. Таким образом, все физические задачи могут быть разбиты на типы исходя из того, какой из законов лежит в основе их решения.

Так, например, «Механика» состоит из четырех разделов:

1. Кинематика поступательного движения.
2. Динамика поступательного движения.
3. Кинематика вращательного движения.
4. Динамика вращательного движения,

каждый из которых оперирует своей группой физических законов и отвечает на свой «вопрос».

1. Кинематика поступательного движения описывает движение тела в пространстве и во времени, при котором все точки тела движутся с одинаковыми значениями скорости и ускорения[1]. Кинематика поступательного движения оперирует лишь теми законами и понятиями, которые позволяют ответить на вопрос: каковы будут или каковы были в определенный момент времени положение тела в пространстве (т.е. его координаты), значения и направления векторов его скорости и ускорения.

2. Динамика поступательного движения отвечает на вопросы: каковы причины возникновения, прекращения и изменения поступательного движения тела, а также почему движение таково? Т.е. законы «Динамики» позволяют определить, каким в данных условиях будет движение: равномерным, равноускоренным, равнозамедленным или с переменным ускорением; каково значение ускорения; до каких пор будет продолжаться движение и прекратится ли оно с обращением в ноль скорости этого движения. Очевидно, что возможна и обратная задача: по известным характеристикам движения определить, каковы были причины, вызвавшие или изменившие его.

3. Кинематика вращательного движения описывает движение тела при котором каждая его точка движется по окружности или дуге окружности центры которых лежат на одной прямой, не выясняя причин, которые привели к возникновению этого движения и почему это движение таково. Отметим, что в случае вращательного движения **вектор полного ускорения изменяется по направлению**. Кинематика вращательного движения оперирует теми законами и понятиями, которые позволяют определить, в какой точке окружности окажется или находилось тело, угол поворота тела, а также значения и направления векторов его угловой скорости и углового ускорения в некоторый момент времени.

4. Динамика вращательного движения отвечает на вопрос: каковы причины возникновения и прекращения вращения тела и почему его вращение таково? Т.е. законы динамики вращательного движения позволяют определить, каким в данных условиях будет вращение – равномерным, равноускоренным, равнозамедленным или с переменным угловым ускорением; каково значение углового ускорения; до каких пор будет продолжаться вращение и прекратиться ли оно с обращением в ноль угловой скорости. Также возможна и обратная задача: по известным характеристикам вращательного движения определить, каковы были причины, вызвавшие или изменившие его.

[1] При этом траектория движения тела не обязательно прямая линия. Так, в случае, движения тела, брошенного под углом к горизонту, траектория – парабола. Однако, прямая, проведенная через любые две точки этого тела, остается параллельна сама себе, поэтому его движение является поступательным и описывается законами кинематики поступательного движения.

1. Кинематика поступательного движения

К задачам на кинематику поступательного движения относятся задачи, в которых вектор ускорения не меняет своего направления, а в качестве искомых и известных величин фигурируют: пройденный путь (S), вектор перемещения ($\vec{S}$), скорость (v или V), ускорение (a) и время (t).

1.1. Основные понятия и соотношения

Основными физическими законами кинематики поступательного движения являются уравнения равнопеременного движения[2]:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_0 + \vec{a}t, \tag{1}$$

$$\vec{S} = \vec{\mathrm{v}}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \tag{2}$$

и определения векторов скорости и ускорения:

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{S}}{dt}, \tag{3}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2}. \tag{4}$$

Здесь: $\vec{\mathrm{v}}_0$ – вектор начальной скорости, т.е. скорости движения в начальный момент времени (при t=0), $\vec{a}$ - вектор ускорения. В случае равнопеременного движения (см. (1),(2)) $\vec{a}$ не изменяется ни по величине, ни по направлению. При этом **если вектора ускорения и скорости сонаправлены,** то движение называется **равноускоренным**, **если направлены в противоположные стороны**, **то равнозамедленным**. **Движение с ускорением равным нулю** называется **равномерным** движением. Следует особо отметить, что так как время инвариантно относительно выбора начала отсчета, то начальный момент времени может быть выбран исходя из удобства решения задачи. Более того, при решении одной и той же задачи может быть выбрано два и более начальных момента времени. Также следует иметь в виду, что **в случае прямолинейного равнопеременного или равномерного движения**, т.е. движения вдоль прямой линии, **модуль вектора перемещения совпадает с пройденным путем**: $\left|\vec{S}\right| = S$

1.2. Порядок решения задач

1. Определить, является ли рассматриваемое движение равномерным, равнопеременным (т.е. равноускоренным или равнозамедленным) или с переменным по величине ускорением.
2. Сделать рисунок, на котором изобразить направления векторов ускорения, скорости и предположительный вид траектории.
3. Выбрать систему координат, направив одну из ее осей параллельно вектору ускорения или вектору скорости движения тела.
4. Выбрать начало отсчета времени. (Обычно его совмещают с моментом времени начала движения или смены направления вектора скорости.)
5. Записать, в соответствии с выбором начала отсчета времени, уравнения (1),(2) или (3),(4) (в зависимости от условия задачи) в проекциях на оси выбранной системы координат. При этом вдоль той из осей, которая направлена по ускорению, движение будет носить ускоренный характер. Вдоль остальных координатных осей движение будет либо отсут-

[2] Равномерное движение является частным случаем равнопеременного движения.

ствовать, либо являться равномерным (проекции вектора ускорения на эти оси равны нулю).

6. Подставить в полученные (в соответствии с п. 5) уравнения моменты времени, для которых требуется определить значения скорости, ускорения, времени или пройденного пути.
7. Решить полученные уравнения.
8. Найти искомые величины по теореме Пифагора, если последние имеют проекции на несколько координатных осей.

1.3. Примеры решения задач

Пример 1.1. Тело движется прямолинейно так, что пройденный ею путь изменяется во времени по закону $S=Bt+Ct^2+Dt^3$, м, где t – время; B, C, D – константы численно равные: B=0.25 м/с, C=0,6 м/с^2, D=0.01 м/с^3. Определить, к какому моменту времени (t_1), после начала движения ускорение тела достигнет значения 6 м/с^2 и каково значение скорости (v_1) в этот момент времени.

Дано:	
B=0.25 м/с C=0.6 м/с^2 D=0.01 м/с^3 $a(t_1)=a_1$= 6 м/с^2 t=? $v(t_1)=v_1$=?	В случае прямолинейного движения скорость тела равна первой производной пути по времени[3] (3) $$\mathrm{v}(t)=\frac{dS}{dt}=B+2Ct+3Dt^2, \qquad (5)$$ а ускорение первой производной скорости по времени (или второй производной пути по времени) (4)

$$a(t)=\frac{d\mathrm{v}(t)}{dt}=2C+6Dt. \qquad (6)$$

Таким образом, подставляя неизвестный момент времени t_1 в (5) и учитывая тот факт, что, согласно условию задачи, $a(t_1)=a_1$ - известно, получим уравнение относительно t_1:

$$a_1=2C+6Dt_1,$$

решая которое, найдем:

$$t_1=\frac{a_1-2C}{6D}. \qquad (7)$$

Подставив найденное выражение для t_1 в (5), определим скорость $v_1(=v(t_1))$ в этот момент времени.

$$v_1=B+2Ct_1+3Dt_1^2=B+2C\frac{a_1-2C}{6D}+3D\left(\frac{a_1-2C}{6D}\right)^2. \qquad (8)$$

Подставив численные данные в (7) и в (8), получим численный ответ задачи:

$$t_1=\frac{6-2\cdot 0.6}{6\cdot 0.01}=80\text{ с},$$

$$v_1=0.25+2\cdot 0.6\cdot 80+3\cdot 0.01\cdot(80)^2=216.25\text{ м/с}.$$

Пример 1.2. Тело брошено под углом к горизонту α=30° с начальной скоростью v_0=20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти дальность его полета по горизонтали (S), время полета (t), наибольшую высоту подъема (H) и время подъема на эту высоту (t_1).

[3] В случае прямолинейного движения достаточно выбрать одну координатную ось вдоль направления движения. При этом все вектора (перемещения, скорости и ускорения) будут иметь единственную (не равную нулю) проекцию именно на эту ось, а ее значение будет совпадать с модулем этих векторов, т.к. все эти вектора параллельны выбранной оси. В соответствии со сказанным, символы векторов при решении данной задачи опущены так же, как и символы проекций.

Дано:	
α=30°	
V_0=20м/с	
a=g=9.81 м/с^2	
S=?, t=?, H=?, t_1=?	

В данной задаче тело движется в поле силы тяжести Земли. Поэтому ускорение движение тела - ускорение свободного падения, которое обычно обозначается буквой g и численно равное 9.81м/с^2 (см. Дано). Вектор ускорения свободного падения направлен вертикально вниз (см. рис.1) и, согласно условию задачи, образует с вектором начальной скорости ($\overrightarrow{V_0}$) угол (90°+α), не равный ни 0°, ни π. Вследствие последнего, движение тела – криволинейное, однако поступательное, поскольку направление вектора ускорения не изменяется. Для описания этого движения выберем систему координат, ось Oy которой (см. рис.1) направим вертикально вверх (параллельно вектору ускорения). Так как ускорение движения тела не изменяется по направлению (т.е. $\vec{a} = \overrightarrow{\text{const}}$), движение - плоское и для его

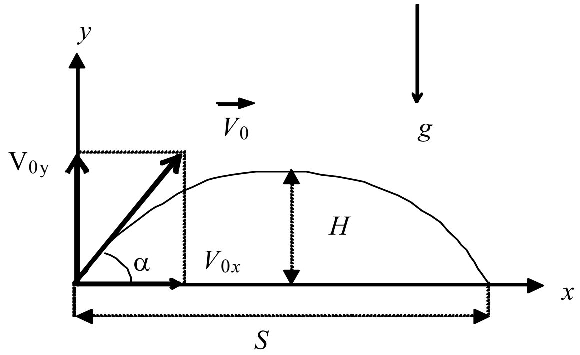


Рис.1

описания достаточно двух осей координат. Направив ось Ox перпендикулярно оси Oy, т.е. горизонтально, разложим движение тела на составляющие: на прямолинейное движение вдоль оси Ox и прямолинейное движение вдоль оси Oy.

Поскольку проекция ускорения на ось Ox, согласно выбору системы координат, равна нулю ($a_x = 0$, см. рис.1), постольку движение вдоль этой оси – равномерное (т.е. с неизменной скоростью). В свою очередь, движение вдоль оси Oy – движение с постоянным значением ускорения: $|a_y| = g$. При этом пока тело движется вверх, проекции векторов скорости и ускорения на ось Oy имеют разные знаки. Поэтому вплоть до момента времени достижения телом точки апогея, т.е. наивысшей точки траектории, его движениевдоль оси Oy носит равнозамедленный характер, а ускорение – отрицательно[4]: a_y=-g. В точке апогея проекция скорости тела на ось Oy обращается в ноль, и тело начинает двигаться вниз. С этого момента времени и вплоть до его падения на землю, тело движется вдоль оси Oy - равноускоренно, т.к. проекции на ось Oy векторов его скорости и ускорение имеют одинаковые знаки, поэтому[2] a_y=+g. В соответствии с вышесказанным, полное время движения тела следует разбить на два промежутка: первый – с момента бросания до момента достижения точки апогея - протяженностью t_1, и второй – с момента достижения точки апогея до момента падения на землю - протяженностью t_2.

Как отмечалось выше, в течение промежутка времени t_1 движение тела вдоль оси Oy носит равнозамедленный характер и проекция скорости на эту ось в наивысшей точке траектории (точке апогея) обращается в ноль ($V_y(t_1)$=0). Тогда, выбирая за начало отсчета времени - момент броска, запишем уравнение движения (1) и (2) вдоль оси Oy для момента времени t_1 (момента достижения точки апогея):

$$V_y(t_1) = V_{0y} - gt_1 = 0, \tag{9}$$

[4] Знак ускорения, выбирается в зависимости от того, совпадают ли скорость и ускорение по направлению, если совпадают, то ускорение считается положительным, в противном случае – отрицательным.

$$H = V_{0y} t_1 - \frac{g t_1^2}{2}, \qquad (10)$$

где V_{0y} – проекция начальной скорости на ось Oy, значение которой можно найти из прямоугольного треугольника (см. рис.1)

$$V_{0y} = V_0 \mathrm{Sin}(\alpha). \qquad (11)$$

Уравнения (9), (10) с учетом равенства (11) образуют систему уравнений. Подставив (11) в (9), найдем t_1.

$$t_1 = \frac{V_0 \mathrm{Sin}(\alpha)}{g}, \qquad (12)$$

а после подстановки (12) и (11) в (10) получим выражение для вычисления наибольшей высоты подъема:

$$H = \frac{(V_0 \mathrm{Sin}(\alpha))^2}{2g}. \qquad (13)$$

Теперь для того, чтобы определить время полета, складывающееся из времени подъема и времени спуска,

$$t = t_1 + t_2, \qquad (14)$$

найдем промежуток времени t_2 – время, за которое тело достигнет земли, начав свое движение из точки апогея. Для решения этой части задачи, выберем начало отсчета времени в момент достижения телом точки апогея. В этот момент времени проекция скорости на ось Oy равна нулю (т.е. начальная скорость равна нулю). В свою очередь, движение тела вдоль оси Oy после прохождения им точки апогея и до падения на землю (т.е. на промежутке времени t_2) носит равноускоренный характер. Тогда записав уравнение (2) для момента времени его падения:

$$H = \frac{g t_2^2}{2}. \qquad (15)$$

и подставив (13) в (15)

$$\frac{(V_0 \mathrm{Sin}(\alpha))^2}{2g} = \frac{g t_2^2}{2}, \qquad (16)$$

найдем t_2

$$t_2 = \frac{V_0 \mathrm{Sin}(\alpha)}{g}. \qquad (17)$$

Сравнив (17) и (12) можно видеть, что время подъема тела из точки бросания в точку апогея - t_1 и время спуска тела из точки апогея в точку падения - t_2 равны. Тогда, подставляя (12) и (17) в (16), получим

$$t = t_1 + t_2 = 2\frac{V_0 \mathrm{Sin}(\alpha)}{g}. \qquad (18)$$

Теперь, чтобы найти дальность полета (S) тела, рассмотрим его движение вдоль оси Ox. Движение вдоль этой оси, как это отмечалось ранее, носит равномерный характер, т.к. проекция ускорения на эту ось равна нулю (a_x=0), следовательно проекция скорости тела на ось Ox не изменяется:

$$V_x = V_{0x} = V_0 \mathrm{Cos}(\alpha). \qquad (19)$$

Записав уравнение движения (2) вдоль оси Ox для момента времени t с учетом равенства (12) и того, что a_x=0, найдем путь, пройденный телом от момента броска до момента падения[5] (т.е. дальность полета)

[5] Здесь за начало отсчета времени вновь выбран момент бросания.

$$S = V_{0x}t = V_0 \operatorname{Cos}(\alpha)\cdot 2\cdot \frac{V_0 \operatorname{Sin}(\alpha)}{g} \ . \tag{20}$$

Учитывая тот факт, что

$$2\operatorname{Cos}(\alpha)\operatorname{Sin}(\alpha) = \operatorname{Sin}(2\alpha) \ ,$$

перепишем (20) к виду

$$S = \frac{V_0^2 \operatorname{Sin}(2\alpha)}{g} \ . \tag{21}$$

Таким образом, задача решена полностью, все неизвестные величины найдены. Запишем сводку конечных результатов (12), (13), (18), (21) и найдем численные значения искомых величин:

$$t_1 = \frac{V_0 \operatorname{Sin}(\alpha)}{g} = \frac{20\cdot \operatorname{Sin}(30^\circ)}{9.81} = 1.02 \text{ с}$$

$$H = \frac{\left(V_0 \operatorname{Sin}(\alpha)\right)^2}{2g} = \frac{\left(20\cdot \operatorname{Sin}(30^\circ)\right)^2}{2\cdot 9.81} = 5.10 \text{ м}$$

$$t = 2\frac{V_0 \operatorname{Sin}(\alpha)}{g} = 2\cdot \frac{20\cdot \operatorname{Sin}(30^\circ)}{9.81} = 2.04 \text{ с}$$

$$S = \frac{V_0^2 \operatorname{Sin}(2\alpha)}{g} = \frac{(20)^2\cdot \operatorname{Sin}(60^\circ)}{9.81} = 35.31 \text{ м}$$

1.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Зависимость пройденного телом пути S от времени t дается уравнением: $S = A + Bt + Ct^3$, где A,B=6 м/с, C=-0.5 м/с^3 – постоянные величины. Определить момент времени (t_0), в который вектор скорости изменит свое направление, а также значение ускорения (a_0) в этот момент времени.

Задача 1.2. Тело брошено со скоростью v_0=10 м/с под углом α=45° к горизонту. Полное время его полета t=2.2 с. Найти максимальную высоту подъема (H) этого тела. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 1.3. Тело брошено горизонтально с башни высотой h=25 м. Начальная скорость тела - v_0=15 м/с Найти время (t) полета тела и на каком расстоянии (S) от подножия башни оно упадет на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 1.4. Камень, брошенный под углом α_1=30° к горизонту, пролетел до точки падения некоторое расстояние l. Под каким еще углом α_2 к горизонту можно бросить камень, чтобы при том же значении начальной скорости он упал на землю на том же расстоянии l от места его броска? Ответ подтвердите вычислениями.

Задача 1.5. Свободно падающее тело в последнюю секунду движения прошло половину всего своего пути. С какой высоты H падало тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Динамика поступательного движения

При поступательном движении тела все его точки имеют одинаковые значения скорости и ускорения. При этом за равные промежутки времени они совершают одинаковое перемещение. Поэтому тела, движущиеся поступательно, можно считать материальными точками. Кроме того, не совпадением точек приложения сил, обусловливающих поступательное движение тела, можно пренебречь. Поэтому на чертежах, сопровождающих решение задач этого раздела, силы, действующие на тело, будут изображаться приложенными к одной и той же его точке.

Задачи данного раздела делятся на три основные группы (типы): задачи на законы Ньютона, задачи на закон сохранения импульса и задачи на закон сохранения и превращения механической энергии.

2.1 Задачи на законы Ньютона

К задачам на законы Ньютона относятся задачи, в условиях которых в качестве известных и неизвестных (т.е. искомых) величин фигурируют, прежде всего, ускорение и силы (или параметры сил), а также масса тела. Например: требуется определить ускорение движения тела известной массы, если оно движется поступательно и испытывает действие заданных в условии задачи сил.

2.1.1. Основные понятия и соотношения

При решении задач на законы Ньютона (т.е. для составления системы уравнений) прежде всего используются три закона Ньютона:

I закон Ньютона: Тело движется равномерно и прямолинейно или покоится (т.е. ускорение тела равно нулю), если сумма сил, действующих на тело, равна нулю[6].

II закон Ньютона: Векторная сумма сил, действующих на тело, равна произведению массы этого тела на вектор ускорения его движения.

$$\sum_{всех} \vec{F} = m\vec{a} \quad . \tag{22}$$

III закон Ньютона: Силы, с которыми взаимодействующие тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению (или более кратко: сила действия равна и противоположна силе противодействия).

$$\overrightarrow{F_{1,2}} = -\overrightarrow{F_{2,1}} \quad . \tag{23}$$

Основным из вышеперечисленных законов для решения задач данного типа является II закон Ньютона, позволяющий связать ускорение тела с силами, действующими на это тело. Однако лишь одного этого закона может оказаться не достаточно для составления полной системы уравнений (т.е. системы уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных). В этом случае, в качестве дополнительных уравнений следует, прежде всего, использовать определения сил и III закон Ньютона. Ниже приведены определения наиболее часто встречающихся в задачах сил.

Примеры сил:

♦ Сила реакции опоры (N) – сила с которой опора противодействует силе давления на нее. Сила реакции опоры приложена к телу давящему на опору, направлена перпендикулярно поверхности опоры и по III закону Ньютона равна

$$N = F_{давл}^{(\perp)} \quad , \tag{24}$$

где $F_{давл}^{(\perp)}$ – модуль силы нормального давления тела на опору.

♦ Сила трения ($F_{тр}$) – сила, препятствующая движению тел относительно друг друга при условии их соприкосновения. Сила трения направлена в противоположную сторону направления вектора скорости движения тела и численно равна произведению коэффициента трения (μ) на модуль силы нормального давления тела на поверхность, по которой оно движется,

$$F_{тр} = \mu F_{давл}^{(\perp)} \ . \tag{25,а}$$

С учетом равенства (24) можно переписать выражение (25,а) через силу реакции опоры

$$F_{тр} = \mu \cdot N \ . \tag{25,б}$$

[6] Этот закон является частным случаем II закона Ньютона.

Выражения (25,а) и (25,б) эквивалентны (в силу III закона Ньютона), однако при решении одних задач удобно использовать выражение (25,а), а других – (25,б).

♦ Сила гравитационного притяжения ($F_{гр}$) двух тел направлена от одного тела к другому вдоль прямой, соединяющей центры масс этих тел, и численно равна

$$F_{гр} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1,2}^2} , \tag{26}$$

где m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел, $r_{1,2}$ – расстояние между телами, γ - гравитационная постоянная.

В случае гравитационного притяжения к Земле выражение (26) может быть записано в виде

$$F_{гр} = \gamma \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} . \tag{26,а}$$

Здесь: M- масса Земли, R – радиус Земли, h – высота положения тела, отсчитываемая от поверхности Земли (как вверх – $h>0$, так и вниз - $h<0$).

♦ Сила тяжести ($F_{тяж}$)[7] – сила гравитационного притяжения тела к Земле **у поверхности Земли ($h<<R$)**. В этом случае высотой положения тела (над поверхностью Земли) можно пренебречь. Тогда (см. (26,а))

$$F_{тяж} = mg , \tag{27}$$

где $g = \gamma \frac{M}{R^2} \approx 9.81$ м/с^2 - ускорение свободного падения.

♦ Сила упругости – сила, возникающая при упругой деформации тела, направленная в противоположную сторону деформации и численно равная[8]

$$F_{упр} = k\Delta x , \tag{28}$$

где k – коэффициент упругости (табличная величина), Δx – величина деформации.

♦ Сила вязкого трения (или сила сопротивления) возникает при движении тела в жидкости или газе. Эта сила направлена в противоположную сторону движения тела и, согласно закону Стокса, численно равна

$$F_{сопр} = \beta v , \tag{29}$$

где β - коэффициент вязкого трения (табличная величина), v – скорость движения тела.

2.1.2. Порядок решения задач на законы Ньютона.

1. Сделайте чертеж, на котором изобразите все силы, действующие на каждое из тел.
2. Укажите направление векторов скорости и ускорения движения каждого тела.
3. Запишите II закон Ньютона в векторном виде для каждого из тел.
4. Выберите для каждого из тел свою систему координат так, чтобы одна из ее осей была бы направлена вдоль вектора ускорения движения этого тела.
5. Спроецируйте II закон Ньютона, записанный для каждого конкретного тела, на оси системы координат, выбранной для него.

Если полученная, в результате описанных выше действий, система уравнений полна, – решите ее. В противном случае (т.е. если число уравнений меньше числа неизвестных), ее следует дополнить недостающими уравнениями используя определение сил, III закон Ньютона и кинематические соотношения (1-4) (последовательно определяя каждую из неизвестных величин и пытаясь записать это определение в виде математического равенства).

---

[7] Для обозначения силы тяжести обычно используется ее выражение - $\overrightarrow{mg}$.

[8] Закон Гука

2.1.3. Примеры решения задач.

Пример 1.3. С воздушного шара, движущегося вертикально вниз с постоянной скоростью v_1=0,5 м/с, сбросили балласт, в результате чего воздушный шар стал подниматься вертикально вверх со скоростью v_2=0,3 м/с. Определить массу сброшенного балласта (m), если коэффициент вязкого трения воздуха β=10 Н·с/м.

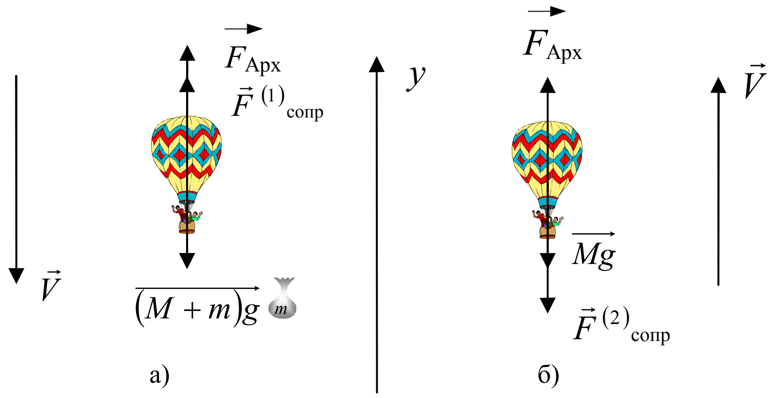


Рис. 2

Дано:
v_1=0.5 м/с
v_2=0.3 м/с
β=10 Н·с/м.

m=?

На рис.2 изображены воздушный шар и силы, действующие на него при спуске (рис.2,а) и подъеме (рис.2,б):

а) когда воздушный шар двигался вертикально вниз (рис.2,а), на него действовали: сила Архимеда ($F_{\text{Арх}}$), направленная вертикально вверх, сила тяжести, равная произведению суммы масс воздушного шара (M) и балласта (m) на ускорение свободного падения, направленная вертикально вниз, и сила сопротивления воздуха ($F^{(1)}_{\text{сопр}}$), направленная в противоположную сторону скорости движения шара (т.е. вертикально вверх).

б) когда с воздушного шара был сброшен балласт и он стал двигаться вертикально вверх (рис.2,б), на него действовали: сила Архимеда ($F_{\text{Арх}}$), направленная вертикально вверх, сила тяжести, равная произведению массы только воздушного шара (M) на ускорение свободного падения, направленная вертикально вниз, и сила сопротивления воздуха ($F^{(2)}_{\text{сопр}}$) , направленная в противоположную сторону скорости движения шара, т.е. вертикально вниз.

Поскольку по условию задачи шар опускался и поднимался с постоянной скоростью, постольку его ускорение как при движении вверх, так и вниз равнялось нулю (a=0). Учитывая этот факт, запишем II закон Ньютона для случая, когда воздушный шар опускался:

$$0=(M+m)\vec{a}=\vec{F}_{\text{Арх}}+(M+m)\vec{g}+\vec{F}^{(1)}_{\text{сопр}} \qquad (30)$$

и поднимался:

$$0=M\vec{a}=\vec{F}_{\text{Арх}}+M\vec{g}+\vec{F}^{(2)}_{\text{сопр}}. \qquad (31)$$

При решении данной задачи можно ограничиться выбором лишь одной координатной оси, т.к. силы, действующие на воздушный шар, направлены вдоль одной и тойже прямой (как при его движении вниз, так и вверх). Направив ось Oy вертикально вверх (см. рис.2а и 2б), т.е. параллельно векторам скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, спроецируем уравнения (30) и (31) на эту ось.

$$0=F_{\text{Арх}}-(M+m)g+F^{(1)}_{сопр} \ , \qquad (32)$$

$$0=F_{\text{Арх}}-Mg-F^{(2)}_{сопр} \ . \qquad (33)$$

Полученная система двух уравнений (32) и (33) содержит пять неизвестных величины: $F_{\text{Арх}}, M, m, F^{(1)}_{\text{сопр}}, F^{(2)}_{\text{сопр}}$. Для того чтобы увеличить число уравнений до числа неизвестных, следует, определяя каждую из неизвестных величин, записать дополнительные уравнения:

– сила Архимеда равна весу вытесненного шаром воздуха. Однако объем шара – неизвестен, и запись закона Архимеда добавит еще одну неизвестную величину[9];
– масса воздушного шара не может быть определена из условия задачи;
– масса балласта просто является искомой величиной, и если ее можно было бы определить, записав какие-либо другие уравнения, то сформулированная выше задача просто не имела бы смысла;
– сила сопротивления при движении тела в газе определяется согласно закону Стокса (30), тогда

$$F^{(1)}_{conp} = \beta v_1 \tag{34}$$

и

$$F^{(2)}_{\text{сопр}} = \beta v_2 \,. \tag{35}$$

Последние два уравнения (34),(35) в совокупности с уравнениями (32),(33) образуют систему четырех уравнений с пятью неизвестными. Таким образом, система полученных уравнений неполна, а способа увеличения числа уравнений при неизменном числе неизвестных – нет. Для решения такой неполной системы уравнений воспользуемся методом исключения неизвестных. Для этого вычтем уравнение (32) из уравнения (33):

$$0 = -mg + F^{(1)}_{\text{сопр}} + F^{(2)}_{\text{сопр}} \,. \tag{36}$$

Подставив в (36) соотношения (34),(35), получим:

$$0 = -mg + \beta v_1 + \beta v_2 \,. \tag{37}$$

Решая (37) относительно m окончательно имеем

$$m = \frac{\beta(v_1 + v_2)}{g} \,.$$

Откуда после подстановки численных данных, найдем ответ задачи

$$m = \frac{10 \cdot (0.5 + 0.3)}{9.81} = 0.82 \quad \text{кг} \,.$$

Пример 1.4. Автопоезд, состоящий из автомобиля (тягача) и двух последовательно соединенных с ним прицепов, массами m_1=5 т (первого от автомобиля) и m_2=8 т (второго) движется с постоянной скоростью по горизонтальной дороге. Найти силу тяги автомобиля ($F_{\text{тяг}}$) и силу натяжения сцепки (T) между прицепами, если коэффициент трения для обоих прицепов одинаков и равен μ= 0.01.

Дано:
m_1=5 т =5000 кг
m_2=8 т =8000 кг
μ=0.01
v=const

$F_{\text{тяг}}$=? T=?

На рис.3 приведен чертеж к задаче, на котором указаны силы, действующие на каждый из прицепов: силы тяжести - $\overrightarrow{m_1 g}$ и $\overrightarrow{m_2 g}$, действующие вертикально вниз; силы реакции опоры - $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, действующие вертикально вниз; силы трения - $\vec{F}^{(1)}_{\text{тр}}, \vec{F}^{(2)}_{\text{тр}}$, направленные против движения (все эти силы приложены к первому и второму прицепам соответственно); силы натяжения сцепки между прицепами, действующие со стороны сцепки на первый прицеп, – $T_{1,2}$ и на второй прицеп – $T_{2,1}$, направленные в противоположные стороны; и сила тяги - $F_{\text{тяг}}$, приложенная только к первому прицепу[10], и, направленная по направлению движения автопоезда. Согласно III закону Ньютона силы $T_{1,2}$ и $T_{2,1}$ равны по величине. Поэтому, в дальнейшем, их модули будем обозначать одной и той же буквой T ($= \left|\vec{T}_{1,2}\right| = \left|\vec{T}_{2,1}\right|$).

[9] Появится третье уравнение, но число неизвестных с пяти увеличится до шести.
[10] Несмотря на то, что автомобиль тянет оба прицепа, сила тяги приложена лишь к первому прицепу, поскольку автомобиль взаимодействует лишь с этим прицепом (через цепное устройство).

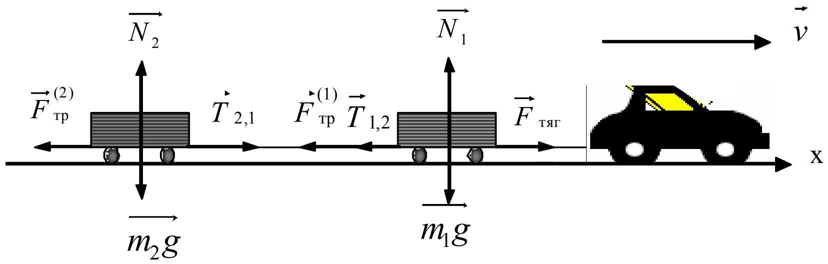


Рис.3

Запишем II закон Ньютона для каждого из прицепов, учтя тот факт, что их скорость постоянна, а следовательно, ускорение равно нулю.
В случае первого прицепа –

$$0 = m_1\vec{a} = \vec{F}_{тяг} + \vec{T}_{1,2} + \vec{F}^{(1)}_{тр} + \overrightarrow{m_1 g} + \vec{N}_1 \ , \tag{38}$$

а в случае второго –

$$0 = m_2\vec{a} = \vec{T}_{2,1} + \vec{F}^{(2)}_{тр} + \overrightarrow{m_2 g} + \vec{N}_2 \, . \tag{39}$$

Выберем систему координат. Поскольку все тела движутся вдоль одной и той же прямой, постольку ограничимся одной системой координат, направив ось Ox вдоль вектора скорости (см. рис.3), а ось Oy – вертикально вверх.

Спроецируем II закон Ньютона, записанный для каждого из прицепов (38,39), сначала на ось Ox[11]:
в случае первого прицепа -

$$0 = F_{тяг} - T - F^{(1)}_{тр} \tag{40}$$

и второго –

$$0 = T - F^{(2)}_{тр} \ . \tag{41}$$

Затем на ось Oy:
в случае первого прицепа -

$$0 = -m_1 g + N_1 \tag{42}$$

и второго –

$$0 = -m_2 g + N_2 \ . \tag{43}$$

Полученная система четырех уравнений (40 – 43) содержит шесть неизвестных: $F_{тяг}$, T, $F^{(1)}{}_{тр}$, $F^{(2)}{}_{тр}$, N_1 и N_2. Поэтому она должна быть дополнена еще двумя уравнениями. Запишем недостающие два уравнения из определения силы трения (25б):

$$F^{(1)}_{тр} = \mu N_1 \ , \tag{44}$$

$$F^{(2)}_{тр} = \mu N_2 \ . \tag{45}$$

Уравнения (40-45) образуют полную систему уравнений (число уравнений и число неизвестных – шесть). Решим эту систему методом подстановки:

– найдем из (42) и (43) силы реакции опоры ($N_1 = m_1 g$ и $N_2 = m_2 g$),
– подставив найденные выражения для сил реакции опоры в (44),(45) соответственно определим силы трения ($F^{(1)}_{тр} = \mu m_1 g$ и $F^{(2)}_{тр} = \mu m_2 g$).

В завершение, после подстановки выражений для сил трения в уравнения (40), (41), получим два уравнения с двумя неизвестными:

$$0 = F_{тяг} - T - \mu m_1 g \tag{46}$$

и

$$0 = T - \mu m_2 g \ . \tag{47}$$

[11] При этом учтем тот факт, что $\left|\vec{T}_{1,2}\right| = \left|\vec{T}_{2,1}\right| \equiv T$

Решая эти уравнения, найдем силы:
- натяжения сцепки

$$T = \mu m_2 g = 0.01 \cdot 8000 \cdot 9.8 = 784 \quad \text{Н}$$

- и тяги[12]

$$F_{\text{тяг}} = \mu (m_1 + m_2) g = 0.01 \cdot (5000 + 8000) \cdot 9.8 = 1274 \quad \text{Н} .$$

Пример 1.5. К пружине, прикрепленной к потолку кабины лифта, поднимающегося вверх с ускорением a=2 м/с^2, прикреплен груз массой m=10 кг. Определить удлинение пружины, если в неподвижном лифте этот же груз растягивал пружину на $\Delta l_0 = 5$ см. (Указание: массой пружины пренебречь, груз покоится относительно кабины лифта)

Дано:
a=2 м/с^2
$\Delta l_0 = 5$ см
$\Delta l = ?$

Поскольку законы Ньютона справедливы только в инерциальных системах отсчета, постольку для решения задачи выберем систему отсчета, связав ее с покоящимся (либо движущимся без ускорения) телом, например с лестничной площадкой. Будем рассматривать движение тел (пружины и груза) из этой системы отсчета.

На рис.4 изображены оба (заданные условием задачи) состояния пружины и груза, как они видятся наблюдателю из инерциальной системы отсчета. Рис.4,а соответствует случаю, когда пружина и груз покоятся (ускорение равно нулю), а рис.4,б отвечает случаю их движения вертикально вверх с не нулевым ускорением[13] (направление ускорения показано стрелкой справо). В каждом из этих случаев на груз действуют две силы: сила тяжести - $\overrightarrow{mg}$, имеющая одно и то же значение и направление (вертикально вниз), а также сила упругости, обозначенная $\vec{F}^{(0)}_{\text{упр}}$ и $\vec{F}^{(1)}_{\text{упр}}$ в случаях покоящегося и движущегося с ускорением лифта соответственно. На рис.4 также изображено относительное удлинение пружины.

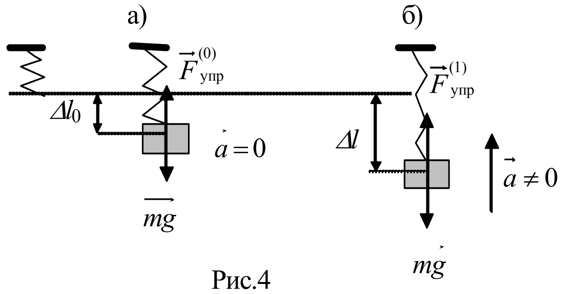


Рис.4

Запишем II закон Ньютона для каждого из рассматриваемых состояний груза:
- покоящегося (рис.4,а)

$$0 = \vec{F}^{(0)}_{\text{упр}} + \overrightarrow{mg} \tag{48}$$

- и движущегося (относительно инерциальной системы отсчета) с не нулевым ускорением (рис.4,б)

$$m\vec{a} = \vec{F}^{(1)}_{\text{упр}} + \overrightarrow{mg} . \tag{49}$$

Выбрав систему координат, состоящую из одной оси Oy (поскольку все силы и ускорение направлены вдоль одной прямой), направленной вертикально вверх, т.е. по ускорению, спроецируем уравнения (48) и (49) на эту ось. Тогда, имеем:

$$0 = F^{(0)}_{\text{упр}} - mg \tag{50}$$

---

[12] Обратите внимание, что сила тяги хотя и приложена только к первому прицепу, но обеспечивает (за счет натяжения сцепки) движение обоих прицепов. Поэтому (и в силу постоянства скорости) она компенсирует действие сил трения, приложенных не только к первому, но и ко второму прицепам.

[13] Относительно кабины лифта ускорение и скорость груза и пружины равны нулю. Однако связанная с ускоренно движущейся кабиной лифта система отсчета не является инерциальной, а следовательно, относительно нее законы Ньютона не выполняются.

и

$$ma = F^{(1)}_{\text{упр}} - mg \quad . \tag{51}$$

Полученная система двух уравнений (50) и (51), содержит три неизвестные величины (т.е. неполна). В то же время искомая величина в явном виде в этих уравнениях не фигурирует. Для включения Δl в полученную систему уравнений, выразим силы упругости через деформацию пружины. В соответствии с законом Гука (см. (28))

$$F^{(0)}_{\text{упр}} = k\Delta l_0 \text{ и } F^{(1)}_{\text{упр}} = k\Delta l \quad . \tag{52}$$

Подставляя соответствующие равенства (52) в уравнения (50) и (51) имеем[14]:

$$0 = k\Delta l_0 - mg \ , \tag{53}$$

$$ma = k\Delta l - mg \ . \tag{54}$$

Разделив уравнение (53) на уравнение (54), исключив тем самым неизвестные k и m, найдем:

$$\Delta l = \Delta l_0 \left(1 + \frac{a}{g}\right) = 0.05 \cdot \left(1 + \frac{2}{9.8}\right) = 0.06 \text{ м} \ .$$

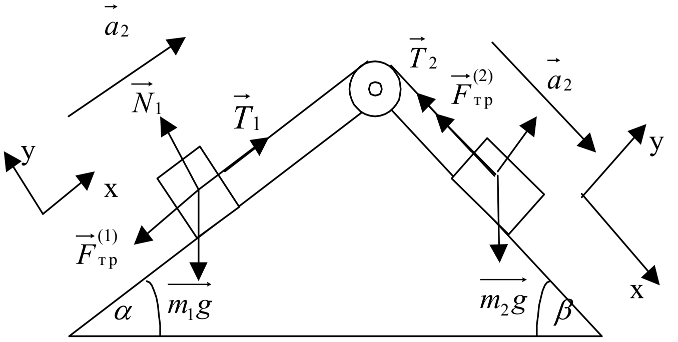


Рис.5

Пример 1.6. На вершине наклонной плоскости с двумя скатами закреплен невесомый блок, который может вращаться без трения. Через блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, к противоположным концам которой прикреплены два груза массами m_1=2 кг и m_2=3 кг. Грузы могут скользить по наклонной плоскости, причем коэффициент их трения о поверхность наклонной плоскости одинаков и равен μ=0.01. Определить ускорение (a) движения грузов и силу натяжения нити (T), если груз массой m_1 находится на скате, составляющем с горизонтом угол α=30°, а массой m_2 – на скате с углом β=45°.

Дано:
m_1=2 кг
m_2=3 кг
μ=0.01
α=30°
β=45°

a=? T=?

Прежде чем приступать к решению задачи, обсудим, что означают два условия:

1) нить нерастяжима.

Это значит, что расстояние между любыми двумя ее точками не изменяется ни при каких условиях. Другими словами (уже применительно к данной задаче) точки прикрепления грузов к нити, а следовательно, и сами грузы перемещаются на одно и то же расстояние за одно и то же время. Таким образом, скорости и **ускорения** движения грузов **одинаковы по модулю**, хотя и различны по направлению –

$$\left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{a}_2\right| = a \ ;$$

2) блок невесом.

Это условие обусловливает, как будет показано в примере 1.16, равенство модулей сил натяжения нити слева и справа от блока, - $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T$.

Поскольку в данной задаче ускорение неизвестно, постольку выберем его направление произвольно. Понятно, что вектор ускорения каждого из грузов должен быть параллелен поверхности ската, на котором этот груз находится. Будем также считать, что более тяжелый

[14] При этом число неизвестных не изменилось, и система уравнений остается неполна.

груз спускается, а более легкий поднимается по наклонной плоскости. (Направления ускорений на рис.5 указаны в соответствии со всем вышесказанным[15].)

Согласно выбранному направлению движения грузов силы трения, действующие на первый ($\vec{F}^{(1)}_{\text{тр}}$) и второй груз ($\vec{F}^{(2)}_{\text{тр}}$), направлены параллельно соответствующим скатам наклонной плоскости вниз и вверх соответственно. Кроме сил трения на грузы оказывают действие силы: натяжения нити ($\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$), направленные вдоль нити от соответствующего груза к блоку; тяжести ($\overrightarrow{m_1 g}$ и $\overrightarrow{m_2 g}$), направленные вертикально вниз; реакции опоры ($\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$), направленные вверх перпендикулярно поверхности соответствующего ската наклонной плоскости и).

Запишем II закон Ньютона для каждого из грузов[16]:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \overrightarrow{m_1 g} + \vec{F}^{(1)}_{\text{тр}} + \vec{N}_1 \;, \tag{55}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + \overrightarrow{m_2 g} + \vec{F}^{(2)}_{\text{тр}} + \vec{N}_2 \;. \tag{56}$$

Так, как ускорения грузов направлены под углом друг к другу, сопоставим каждому из них свою систему координат, такую, что ее координатная ось *Ox* была бы направлена вдоль вектора ускорения груза, которому она соответствует[17].

Спроецируем II закон Ньютона, записанный для первого (55) и второго (56) тела, на оси системы координат, отвечающей каждому из них. При этом вектора ускорения и сил натяжения нити будут иметь одну не равную нулю проекцию на ось *Ox*, совпадающую со значением их модулей[18]. Вводя обозначения: $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$ и $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$ (т.к. нить нерастижима и блок невесом), получим:

$$m_1 a = T - m_1 g\mathrm{Sin}(\alpha) - F^{(1)}_{\text{тр}} \,, \tag{57}$$

$$0 = -m_1 g\mathrm{Cos}(\alpha) + N_1 \;, \tag{58}$$

$$m_2 a = -T + m_2 g\mathrm{Sin}(\beta) - F^{(2)}_{\text{тр}} \;, \tag{59}$$

$$0 = -m_2 g\mathrm{Cos}(\beta) + N_2 \,. \tag{60}$$

Система четырех уравнений (57)-(60) содержит шесть неизвестных – a, T, N_1, N_2, $F^{(1)}_{\text{тр}}$ и $F^{(2)}_{\text{тр}}$. Дополним ее, записав определения сил трения:

$$F^{(1)}_{\text{тр}} = \mu N_1 \tag{61}$$

и

$$F^{(2)}_{\text{тр}} = \mu N_2 \;. \tag{62}$$

Полученная таким образом система шести уравнений (57-62) содержит шесть неизвестных, т.е. полна. Подставив вытекающие из (58) и (60) выражения для сил реакции опоры в равенства (61) и (62), а результаты этих подстановок в (57) и (59) соответственно, уменьшим число уравнений и неизвестных до двух:

$$m_1 a = T - m_1 g\mathrm{Sin}(\alpha) - \mu m_1 g\mathrm{Cos}(\alpha) \tag{63}$$

$$m_2 a = -T + m_2 g\mathrm{Sin}(\beta) - \mu m_2 g\mathrm{Cos}(\beta) \,. \tag{64}$$

Выполнив суммирование уравнений (63) и (64), а затем, разделив полученнйй результат на сумму масс грузов, найдем их ускорение

---

[15] Если выбор направления ускорений был сделан неправильно, тогда в конечном результате будет получено, что модуль ускорения - отрицателен. В этом случае придется вернуться к началу решения задачи, переопределить направление вектора ускорения и повторить решение.

[16] Масса блока равна нулю, поэтому II закон Ньютона для него можно не записывать.

[17] Выбор единой (для обоих грузов) системы координат приведет к тому, что хотя бы один из векторов ускорения будет иметь две ненулевых проекции (на ось Ох и ось Оу). В результате этого число неизвестных увеличится на единицу, а это в свою очередь потребует составления дополнительного уравнения, что поведет к усложнению решения задачи.

[18] $a_{1y}=a_{2y}=0$

$$a = g\frac{m_2\mathrm{Sin}(\beta) - m_1\mathrm{Sin}(\alpha) - \mu\left(m_2\mathrm{Cos}(\beta) + m_1\mathrm{Cos}(\alpha)\right)}{\left(m_2 + m_1\right)} =$$

$$= 9.8 \cdot \frac{3 \cdot \mathrm{Sin}\left(45^\circ\right) - 2 \cdot \mathrm{Sin}\left(30^\circ\right) - 0.01 \cdot \left(3 \cdot \mathrm{Cos}\left(45^\circ\right) + 2 \cdot \mathrm{Cos}\left(30^\circ\right)\right)}{\left(3+2\right)} \approx 2.1 \text{м/с}^2$$

Подставив полученное выражение для ускорения в уравнение (63) (либо (64)), после преобразований найдем значение силы натяжения нити:

$$T = \frac{m_1 m_2}{\left(m_1 + m_2\right)} g\left[\mathrm{Sin}(\alpha) + \mathrm{Sin}(\beta) + \mu\left(\mathrm{Cos}(\alpha) - \mathrm{Cos}(\beta)\right)\right] =$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{\left(2+3\right)} \cdot 9.8 \cdot \left[\mathrm{Sin}(30^\circ) + \mathrm{Sin}(45^\circ) + 0.01 \cdot \left(\mathrm{Cos}(30^\circ) - \mathrm{Cos}(45^\circ)\right)\right] \approx 24.3\text{Н}$$

2.1.4. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.6. Стальная проволока выдерживает силу натяжения T=4400 Н. С каким наибольшим ускорением a можно поднимать груз массой m=400 кг, подвешенный на этой проволоке, чтобы она не разорвалась?
(Ответ: a=1.25 м/с^2).

Задача 1.7. Под действием силы F=10 Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного пути от времени имеет вид: $S = A - Bt + Ct^2$, где C=1 м/с^2. Найти массу m тела.
(Ответ: m=5 кг).

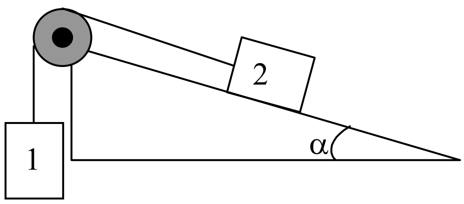


Рис.6

Задача 1.8. Автомобиль массой m=3 т движется по наклонной плоскости вверх с постоянной скоростью. Найти силу тяги $F_{тяг}$ автомобиля, если угол наклонной плоскости α=30°, а коэффициент трения μ=0.02.
(Ответ: $F_{тяг}$= 15224 Н).

Задача 1.9. Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости (рис.6), образующей с горизонтом угол α=30°. Грузы 1 и 2 одинаковой массы m_1=m_2=m=1кг соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Найти ускорение движения грузов a и силу натяжения нити T, если коэффициент трения груза 2 о наклонную плоскость μ=0.01. Трением в блоке пренебречь.

2.2. Задачи на закон сохранения и превращения механической энергии

Основное уравнение, при решении задач данного типа, записывается исходя из закона сохранения и превращения полной механической энергии. Этот закон связывает изменение полной механической энергии и работу неконсервативных сил. Поэтому в задачах на закон сохранения и превращения механической энергии искомыми величинами могут выступать: скорость, поскольку она входит в определение кинетической энергии; пройденный путь и значение неконсервативной силы или ее параметры, поскольку эти величины входят в выражение для работы; величина деформации тела, высота подъема тела, координаты тела или положение одного тела относительно другого, поскольку эти параметры определяют потенциальную энергию; масса тела, поскольку она входит в определение кинетической энергии, а также в выражения для потенциальных энергий ряда консервативных сил, и другие физические параметры, связанные с работой и энергией.

2.2.1 Основные понятия и соотношения.

Закон сохранения и превращения полной механической энергии:

$$E_2 - E_1 = A_{нк} , \qquad (65)$$

где $A_{нк}$ – работа неконсервативных сил, E_1 и E_2 – полные механические энергии начального и конечного состояния тела или системы тел соответственно.

Полная механическая энергия (E) равна сумме кинетической (K) и потенциальной ($П$) энергий:

$$E = K + П . \qquad (66)$$

В случае поступательного движения[19] кинетическая энергия рассчитывается по формуле:

$$K = \frac{mv^2}{2} . \qquad (67)$$

В тоже время универсальной формулы для расчета потенциальной энергии не существует, поскольку вид и величина этой энергии определяются типом взаимодействия (или другими словами силами, которые эту энергию создают). Вот некоторые примеры выражений для потенциальной энергии:

– потенциальная энергия силы тяжести

$$П = mgh , \qquad (68)$$

– потенциальная энергия силы гравитационного притяжения

$$П = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} , \qquad (69)$$

где γ - гравитационная постоянная,

– потенциальная энергия силы упругой деформации

$$П = \frac{kx^2}{2} . \qquad (70)$$

В свою очередь *работа постоянной силы*, в том числе и неконсервативной силы ($A_{нк}$), может быть рассчитана, как

$$A_{нк} = F_{нк} S \mathrm{Cos}(\alpha) . \qquad (71)$$

Здесь: α - угол между векторами силы и перемещения, $F_{нк}$ – модуль неконсервативной силы или равнодействующей всех неконсервативных сил, действующих на тело, S – модуль вектора перемещения (в случае поступательного движения совпадающий с пройденным путем).

К неконсервативным силам относятся, прежде всего, силы трения, тяги, пластической деформации и другие, превращающие один вид (тип) энергии в другой (подробней см. конспект).

Если на тело или тела не действуют неконсервативные силы или их действие компенсировано, т.е. $A_{нк}$=0, то закон сохранения и превращения механической энергии трансформируется в *закон сохранения механической энергии*. В соответствии, с (65) математическая запись этого закона имеет вид:

$$E_1 = E_2 \quad \text{или} \quad E = K + П = \text{const} , \qquad (72)$$

а его формулировка звучит следующим образом: **Полная механическая энергия консервативной системы – не изменяется.** Т.е. значения полной механической энергии консервативной системы в начальном и конечном состояниях равны.

2.2.2. Порядок решения задач.

1. Сделайте чертеж к задаче.
2. Определите, в какие промежутки времени или на каких участках пути действовали неконсервативные силы и что про них известно: можно ли их рассчитать или они заданы, или сами эти силы требуется найти (или параметры этих сил).
3. Выберите начальное и конечное состояние так, чтобы в одном из них фигурировала искомая величина, а в другом – все физические величины, определяющие энергию,

[19] При движении тела со скоростью много меньшей скорости света (равной 300 000 км/с).

были бы известны. При этом неконсервативная сила, действующая на всем промежутке времени, отделяющем начальное и конечное состояния, должна быть известна так же, как и пройденный телом путь за этот промежуток времени.

В случае же поиска значения неконсервативной силы или ее параметра, или пройденного пути – начальное и конечное состояния должны быть выбраны так, чтобы значения им соответствующих полных механических энергий или всех физических параметров, определяющих полную механическую энергию этих состояний, были бы известны.

4. Запишите выражение для полной энергии начального и конечного состояний. При этом, если в системе действуют несколько консервативных сил, то потенциальная энергия такой системы равна сумме потенциальных энергий, отвечающих каждой из консервативных сил.

5. Запишите выражение для работы неконсервативных сил при переходе из начального в конечное состояние. Если неконсервативных сил несколько, то их работа равна сумме работ каждой из них. Если неконсервативные силы отсутствуют или компенсируют друг друга, то соответствующая им работа равна нулю. При этом следует особо помнить, что работа неконсервативных сил зависит от формы траектории. Поэтому для каждого участка траектории определенной формы следует записать свое выражение для работы, а работу на всем протяжении пути найти, как сумму работ на каждом из участков.

6. Запишите закон сохранения и превращения механической энергии с учетом выражений, записанных согласно п.п. 4 и 5 настоящего алгоритма.

Результатом описанной последовательности действий будет одно уравнение. Если число неизвестных в нем – больше единицы, это уравнение следует дополнить другими уравнениями, давая определения неизвестных величин, или воспользоваться методом исключения неизвестных (выполняя деление на неизвестные величины, которые из физических соображений не могут быть равными нулю). После того как число уравнений окажется равным числу неизвестных, систему уравнений следует решить методом подстановки или другим методом.

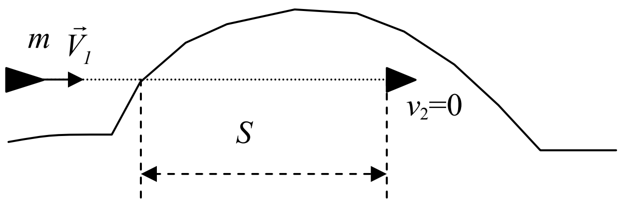


Рис.7

2.2.3 Примеры решения задач.

Пример 1.7. Пуля, летящая со скоростью v=400 м/с, попадает в бруствер окопа и проходит внутри него до полной остановки путь S=0.5 м. Определить силу сопротивления, действовавшую на пулю внутри бруствера, если масса пули m=9 г. (Силу сопротивления считать постоянной на всем протяжении пути пули внутри бруствера.)

Дано:	
v_1=400м/с S=0.5 м m=9 г=$9\cdot 10^{-3}$ кг	В задаче требуется найти неконсервативную силу – силу сопротивления при заданных значениях массы, скорости и пройденного пути. Эта задача может быть решена с помощью кинематических формул. Однако такой способ ее решения громоздок и весьма долог. Более простое решение данной задачи основано на законе сохранения и превращения механической энергии.
$F_{сопр}$=?	

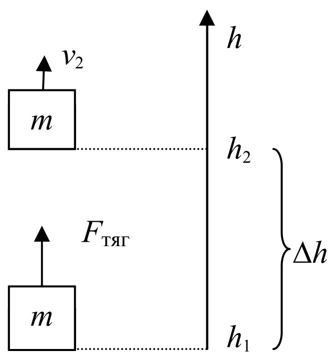


Рис.8

За начальное состояние выберем состояние пули в момент ее попадания в бруствер окопа. В этот момент времени пуля, двигавшаяся со скоростью v_1, обладала кинетической энергией $K_1 = \dfrac{mv_1^2}{2}$ и некоторой потенциальной энергией $П_1$, обусловленной действием силы тяжести. Тогда энергия начального состояния равна

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + П_1 \ . \tag{73}$$

За конечное состояние выберем состояние пули в момент ее остановки. В этот момент времени ее кинетическая энергия равнялась нулю (т.к. пуля остановилась – v_2=0), а потенциальная энергия также - $П_1$ поскольку положение пули по высоте не изменилось. Тогда полная энергия пули в конечном состоянии определяется равенством

$$E_2 = П_1 \ . \tag{74}$$

Запишем теперь выражение для работы силы сопротивления. Согласно указанию к задаче, сила сопротивления не изменялась по величине, следовательно, ее работа может быть рассчитана по формуле (71). Учитывая тот факт, что сила сопротивления направлена в противоположную сторону движения, а значит угол, между ее вектором и вектором перемещения - α=180°, имеем:

$$A_{нк} = F_{сопр} S Cos(180^\circ) = -F_{сопр} S \ . \tag{75}$$

Подставив (73)-(75) в выражение закона сохранения и превращения механической энергии (65), получим

$$П_1 - \frac{mv_1^2}{2} - П_1 = -F_{нк} S \ .$$

После сокращения $П_1$ и деления на пройденный путь, окончательно имеем

$$F_{нк} = \frac{mv_1^2}{2S} = \frac{9\cdot 10^{-3}\cdot 400^2}{2\cdot 0.5} = 1440 \quad Н \ .$$

Пример 1.8. При вертикальном подъеме груза массой m=2 кг на высоту Δh=10 м постоянной силой (тяги) была совершена работа $A_{нк}$ = 576 Дж. С каким ускорением (a) поднимался груз, если его начальная скорость равнялась нулю?

Дано:	
$A_{нк}$ = 576 Дж Δh=10 м m=2 кг v_1=0 $F_{тяг}$= const	В данной задаче требуется найти ускорение движения тела. При этом задана не сила, а работы силы. Поэтому данную задачу можно и целесообразно решать, используя закон сохранения и превращения механической энергии. Согласно условию задачи на тело действует единственная неконсервативная сила – сила тяги (подъемная сила), значение работы ($A_{нк}$) которой задано.
a=?	

Кроме силы тяги, на тело действует сила тяжести, являющаяся консервативной силой, вследствие чего тело обладает потенциальной энергией (mgh), которая изменяется с изменением его положения (по высоте).

Выберем за начальное состояние – состояние тела в начальный момент времени. В этот момент времени скорость тела (начальная скорость) - v_1=0, а значение высоты – h_1[20]. За конечное состояние выберем состояние тела, когда оно было поднято на высоту Δh. В этом состоянии скорость тела имела некоторое значение v_2, а значение высоты[16]– $h_2(=h_1+\Delta h)$.

Запишем выражения для полных механических энергий тела
в начальном

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = mgh_1 \tag{76}$$

и конечном

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \tag{77}$$

состояниях.

В соответствии с законом сохранения и превращения механической энергии (65), приравняем разность этих энергий работе силы тяги, значение которой – известно. Получим

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mg(h_2 - h_1) = \\ = \frac{mv_2^2}{2} + mg\Delta h = A_{\text{нк}} \end{aligned} \tag{78}$$

Однако это уравнение не содержит искомой величины – ускорения.

Как известно из кинематики, скорость и ускорение связаны между собой. По условию задачи, на тело действуют две постоянные по величине и направлению силы – сила тяжести и сила тяги. В силу их неизменности, а следовательно, неизменности их равнодействующей, и согласно II закону Ньютона, ускорение движения тела – постоянно (как по величине, так и по направлению). Таким образом, характер движения тела – поступательный равнопеременный. Учитывая тот факт, что начальная скорость равнялась нулю, запишем уравнения этого движения (см. (1) и (2)):

- для перемещения (по высоте)

$$\Delta h = \frac{at^2}{2} \tag{79}$$

- и конечного значения скорости

$$v_2 = at \quad . \tag{80}$$

Здесь: a – ускорение, t - время перемещения тела на высоту Δh.

Уравнения (78), (79) и (80) образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными – a, t, v_2. Система – полна. Решим ее методом подстановки:

- Выразив t из (79)

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta h}{a}} \ ,$$

- полученное выражение подставив в (80)

$$v_2 = \sqrt{2a\Delta h} \ ,$$

- а установленное выражение для v_2 в уравнение (78), получим:

$$ma\Delta h + mg\Delta h = A_{\text{нк}} \quad . \tag{81}$$

Решая (81) относительно a, окончательно найдем

$$a = \frac{A_{\text{нк}}}{m\Delta h} - g = \frac{576}{2 \cdot 10} - 9.8 = 19 \quad \text{м/с}^2 \ .$$

Пример 1.9. Какую скорость (v_1) надо сообщить телу, чтобы оно могло подняться с поверхности Земли на высоту (h), равную трем радиусам Земли ($R_З \approx 6000$ км)? Сопротивлением воздуха и силами притяжения к другим планетам – пренебречь.

---

[20] Значения высот h_1и h_2 – неизвестны, зато известна их разность -Δh.

Дано:	
$h=3R_З\approx 1.8\cdot 10^6$ м	
$v_2=0$	
$v_1=?$	

По условию задачи тело должно подняться на высоту h, но не выше. Поэтому при достижении им этой высоты (h) значение скорости должно обратиться в нуль ($v_2=0$). Иначе тело не остановится и поднимется еще выше. Факт равенства нулю конечной скорости следует отразить при записи "Дано".

Особо следует отметить, что в данной задаче рассматривается перемещение тела на расстояние, сравнимое с радиусом Земли (и даже большее). Поэтому использовать понятие силы тяжести и соответствующее ей выражение для потенциальной энергии нельзя. Последние справедливы лишь для тел, находящихся вблизи поверхности Земли ($h<<R_З$). Поэтому при решении этой задачи следует рассматривать движение тела **в гравитационном поле** Земли (т.е. под действием силы гравитационного притяжения), а не в поле силы тяжести.

В соответствии с вышесказанным и условием задачи на тело действует единственная сила – сила гравитационного притяжения. Эта сила – консервативна. Неконсервативные силы (силы сопротивления, тяги и т.д.) – отсутствуют (см. указание к задаче). Таким образом, работа неконсервативных сил равна нулю – $A_{нк}=0$.

Выберем за начальное состояние – состояние тела на поверхности Земли в тот момент времени, когда ему была сообщена скорость v_1, значение которой и требуется определить. В этом состоянии тело обладало кинетической энергией - $K_1=\dfrac{mv_1^2}{2}$ и потенциальной энергией гравитационного притяжения к Земле – Π_1. Последняя, согласно (69), отрицательна (т.к. это – энергия притяжения) и определяется расстоянием между центрами масс тела и Земли, а также их массами

$$\Pi_1=-\gamma\frac{mM}{R_З}\ ,$$

где M – масса Земли, $R_З$ – радиус Земли, совпадающий с расстоянием между центрами масс Земли и тела, находящегося на ее поверхности, m – масса тела, γ - гравитационная постоянная. В соответствии с выше сказанным, полная механическая энергия тела в начальном состоянии имеет вид:

$$E_1=K_1+\Pi_1=\frac{mv_1^2}{2}-\gamma\frac{mM}{R_З}\ . \qquad (82)$$

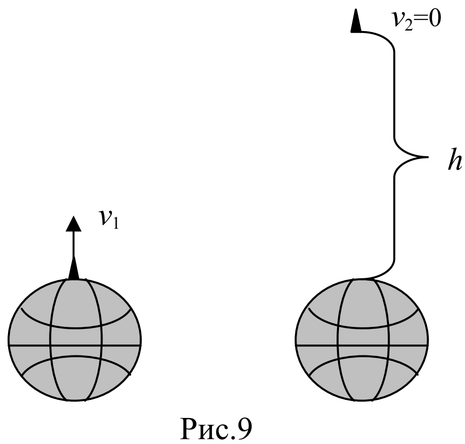


Рис.9

Выберем за конечное состояние – состояние тела в момент достижения им точки максимального удаления от Земли. В этот момент времени скорость тела - v_2=0, а следовательно, его кинетическая энергия также равна нулю – K_2=0. В свою очередь, в этом положении тела расстояние между его центром масс и центром масс Земли складывается из радиуса Земли и высоты подъема, т.е. равно - (R_3+h). Тогда полная механическая энергия тела в конечном состоянии может быть записана как:

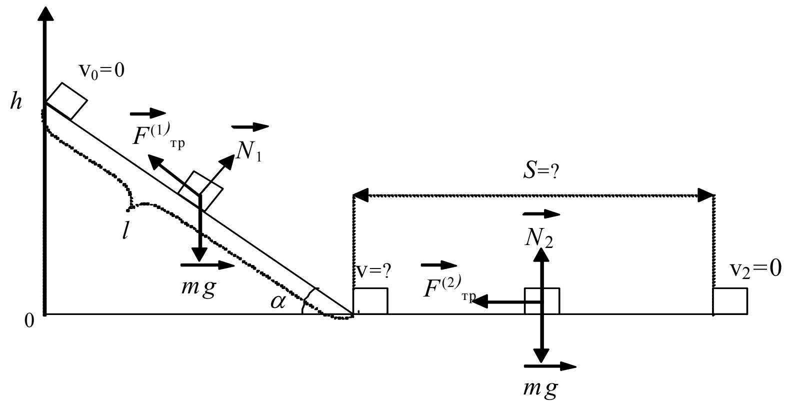


Рис.10

$$E_2 = K_2 + \Pi_2 = -\gamma \frac{mM}{R_3 + h} \ . \tag{83}$$

Подставляя в математическую запись закона сохранения и превращения механической энергии (65) выражения (82) и (83) и учитывая, отмеченный ранее факт, что $A_{нк}$=0, получим

$$E_2 - E_1 = -\gamma \frac{mM}{R_3 + h} - \left(\frac{m\text{v}_1^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R_3} \right) = 0 \ . \tag{84}$$

Преобразуем уравнение (84). Сокращая m и принимая во внимание, что h=3R_3, после перегруппировки слагаемых найдем, что

$$\text{v}_1 = \sqrt{\frac{3}{2} \gamma \frac{M}{R_3}} \ . \tag{85}$$

Несмотря на то, что величины γ и M (- масса Земли) являются табличными, выражение (85) может быть преобразовано к существенно более простому виду. Для этого следует вспомнить, что сила тяжести равна силе гравитационного притяжения к Земле у ее поверхности (т.е. h=0)

$$mg = \gamma \frac{mM}{R_3^2} \ .$$

Сокращая левую и правую части этого равенства на m, имеем:

$$gR_3 = \gamma \frac{M}{R_3} \ . \tag{86}$$

Подставляя (86) в (85) окончательно найдем:

$$\text{v}_1 = \sqrt{\frac{3}{2} gR_3} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 9.8 \cdot 6 \cdot 10^6} = 9391.5 \quad \text{м/с} \ .$$

Пример 1.10. Тело массой m=3 кг соскальзывает с вершины наклонной плоскости высотой h=4 м без начальной скорости. Длина ската наклонной плоскости – l=8 м, а значение коэффициента трения (μ) тела одинаково на всем протяжении его пути и равно 0.1. Определить: а) скорость (v) тела у подножия наклонной плоскости; б) расстояние (S) которое пройдет тело от подножия наклонной плоскости до точки своей полной остановки[21].

[21] Т.е. скорость тела в этот момент времени равна нулю – v_2=0.

Дано:	
h=4 м	
l=8 м	
v_0=0	
v_2=0	
μ=0.1	
v=?, S=?	

В данной задаче рассматривается движение тела под действием двух сил: консервативной силы – силы тяжести и неконсервативной силы – силы трения. Первой из них отвечает потенциальная энергия mgh, величина которой изменяется в процессе движения. Выберем за начало отсчета высоты, а следовательно, и потенциальной энергии силы тяжести, уровень подножия наклонной плоскости. Тогда вершине наклонной плоскости будет отвечать значение высоты – h(=8 м).

Сила трения как неконсервативная сила потенциальной энергии не создает, но также совершает работу – $A_{нк}$. Однако величина ее работы зависит от формы траектории. Поэтому выражения для ее работы на наклонном ($A_{нк}^{(1)}$) и горизонтальном ($A_{нк}^{(2)}$) участках пути должны отличаться. Вследствие чего и из-за того, что задача содержит два вопроса (для ответа на каждый из которых следует записать свою систему уравнений), разобьем ее решение на два этапа.

а) На первом этапе найдем значение скорости тела у подножия наклонной плоскости. На всем промежутке времени движения от вершины к подножью наклонной плоскости тело испытывало действие единственной неконсервативной силы – силы трения.. Значения этой силы и ее работы могут быть вычислены, поскольку коэффициент трения задан.

Выберем за начальное состояние тела его состояние на вершине наклонной плоскости в момент начала скольжения. Все параметры этого состояния известны (значения высоты и скорости заданы условием задачи). Учитывая тот факт, что тело соскальзывает без начальной скорости, запишем выражение для его полной энергии в начальном состоянии

$$E_1 = \frac{m\mathrm{v}_0^2}{2} + mgh = mgh \ . \tag{87}$$

За конечное состояние выберем то состояние, в котором фигурирует искомая величина, т.е. в момент времени прохождения телом подножия наклонной плоскости. Полная механическая энергия тела в этом состоянии также равна сумме его кинетической и потенциальной энергий. Правда, последняя равна нулю, так как в этот момент времени тело находится на отметке, выбранной за начало отсчета высоты. Поэтому его полная механическая энергия, в так выбранном конечном состоянии, совпадает с его кинетической энергией:

$$E_2 = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} \ , \tag{88}$$

где v – значение скорости тела у подножия наклонной плоскости.

Теперь запишем выражение для работы, совершенной силой трения при движении тела от вершины до подножия наклонной плоскости. Так, как сила трения постоянна, как по величине, так и по направлению, ее работа может быть рассчитана по формуле (71). Учитывая тот факт, что сила трения направлена против движения, т.е. составляет с вектором перемещения угол 180°, имеем:

$$A_{нк} = F_{тр}^{(1)} l \mathrm{Cos}(180^\circ) = -F_{тр}^{(1)} l \ . \tag{89}$$

Здесь: $F_{тр}^{(1)}$ - сила трения, действующая на тело во время его скольжения по скату наклонной плоскости, l – путь, пройденный телом от вершины до подножья наклонной плоскости, совпадающий с длиной ее ската, и, равный модулю вектора перемещения.

В свою очередь, согласно (25а) $F_{тр}^{(1)} = \mu N_1$, где N_1 – модуль силы нормального давления на рассматриваемом участке пути, численно равный нормальной (перпендикулярной) составляющей силы тяжести - $N_1 = mg\mathrm{Cos}(\alpha)$ (см. рис.10). В соответствии со сказанным, выражение (89) может быть переписано к виду:

$$A_{нк} = -\mu mglCos(\alpha) , \tag{90}$$

где α - угол наклонной плоскости.

Подставив в закон сохранения и превращения полной механической энергии (65) соотношения (87), (88) и (90), получим уравнение для нахождения v:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2} - mgh = -\mu mglCos(\alpha)\,. \tag{91}$$

Однако оно содержит неизвестное значение косинуса угла α, которое равно отношению прилежащего катета к гипотенузе (см.рис.10). Используя теорему Пифагора, найдем длину прилежащего катета, а затем и значение косинуса угла этого угла (см. рис.10).

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2}\,.$$

Подставляя это выражение в (91), производя сокращение массы и решая получающееся уравнение относительно v, найдем ответ на первый вопрос задачи:

$$\begin{aligned} \mathrm{v} &= \sqrt{2gh\left(1 - \mu\sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 - 1}\right)} = \\ &= \sqrt{2\cdot 9.8\cdot 4\cdot\left(1 - 0.1\cdot\sqrt{\left(\frac{8}{4}\right)^2 - 1}\right)} \approx 8.1 \quad \text{м/с} \end{aligned}\,. \tag{92}$$

б) На втором этапе решения задачи рассмотрим движение тела по горизонтальному участку пути и ответим на второй вопрос задачи – найдем путь S, пройденный телом от подножья наклонной плоскости до полной его остановки. Для этого также воспользуемся законом сохранения и превращения механической энергии.

Выбрав за начальное состояние – состояние тела у подножья наклонной плоскости

$$E_1' \equiv E_2 = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}\,, \tag{93}$$

а за конечное состояние – состояние тела в момент его остановки, когда и высота подъема, и скорость тела равнялись нулю, т.е. E'_2=0, запишем выражение для работы силы трения на горизонтальном участке пути (от подножья наклонной плоскости до точки остановки). В этом случае сила нормального давления равна силе тяжести. В свою очередь сила трения, согласно (25а), определяется равенством: $F_{\text{тр}}^{(2)} = \mu mg$, а выражение для ее работы может быть записано следующим образом:

$$A_{\text{нк}}^{(2)} = F_{\text{тр}}^{(2)} S\mathrm{Cos}(180^\circ) = -\mu mgS\,. \tag{94}$$

В соответствии с выражениями (93), (94) и с тем, что полная механическая энергия тела в конечном состоянии равна нулю (E'_2=0), закон сохранения и превращения механической энергии (65) можно записать в виде:

$$-\frac{m\mathrm{v}^2}{2} = -\mu mgS\,. \tag{95}$$

Подставив в (95) найденное ранее выражение для v (см. (92)) и произведя сокращение на массу, найдем ответ на второй вопрос задачи:

$$\begin{aligned} S &= h\left(\frac{1}{\mu} - \sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 - 1}\right) = \\ &= 4\cdot\left(\frac{1}{0.1} - \sqrt{\left(\frac{8}{4}\right)^2 - 1}\right) \approx 33{,}1 \quad \text{м} \end{aligned}\,.$$

2.2.4. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.10. Найти наибольший прогиб рессоры от груза некоторой массы m, положенного на его середину, если статический прогиб рессоры от того же груза h_0=2 см. (Ответ h_{max}=4 см.) (Статический прогиб – прогиб рессоры при неподвижно лежащем грузе. В случае же, если груз положить на рессору, то рессора будет деформироваться под действием силы тяжести груза, в результате чего груз будет двигаться вертикально вниз. Затем, когда рессора максимально деформируется, она начнет выпрямляться и направление движения груза сменится на противоположное - вверх, и т.д. Обратите внимание на то, что груз движется под действием двух консервативных сил: силы упругости и силы тяжести.)

Задача 1.11. Тело скользит вверх по наклонной плоскости, имеющей угол наклона α=30°. Определить на какую высоту поднимется тело, если его скорость у подножья наклонной плоскости была v=30 м/с, а коэффициент трения о поверхность наклонной плоскости составляет μ=0. 1. (Ответ: h= 38,3 м).

Задача 1.12. Найти отношение кинетической и потенциальной энергий тела брошенного с начальной скоростью v_0=15 м/с под углом к горизонту α=60°, через Δt=1 с после броска. Сопротивлением воздуха пренебречь.

(Ответ: $\frac{K}{П} = 0.42$) .

Задача 1.13. Найти вторую космическую скорость v_2, т.е. скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно преодолело земное притяжение и навсегда удалилось бы от Земли. Сопротивлением воздуха пренебречь. (Ответ:v_2=11.2 км/с).

2.3. Задачи на закон сохранения импульса

В основе решения задач этого типа лежит уравнение, записанное с помощью закона сохранения импульса, согласно которому суммарный вектор импульса изолированной (от внешнего воздействия) системы тел остается неизменным. Для решения задач этот закон может быть переформулирован в более удобной форме: **Если на некоторую совокупность тел (систему тел) не действуют внешние силы или их действие скомпенсировано, то векторная сумма импульсов этих тел «До» (до взаимодействия, до столкновения и т.д) равна векторной сумме их импульсов «После» (после взаимодействия, после столкновения и т.д.)** –

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i^{\,(\text{До})} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i^{\,(\text{После})} , \qquad (96)$$

где $\vec{p}_i^{\,(\text{До})}$ и $\vec{p}_i^{\,(\text{После})}$ - вектора импульсов i-го тела до и после взаимодействия соответственно; N – число тел объединенных в «систему»[22]. При этом следует помнить, что <u>*импульс тела*</u> равен произведению его массы на вектор скорости движения этого тела

$$\vec{p} = m\vec{v} . \qquad (97)$$

В дальнейшем примем следующие обозначения: символом v будем обозначать скорости тел до их взаимодействия, а символом u – после их взаимодействия.

Кроме приведенных выше формулировки закона сохранения и определения импульса, при решении задач следует иметь в виду также определения **абсолютно неупругого** и **абсолютно упругого** соударений:

♦ <u>*Абсолютно неупругим соударением*</u> называется такое соударение тел после которого тела движутся как единое целое, т.е. образуют единое тело, масса которого равна сумме масс соударившихся тел. Закон сохранения импульса в этом случае может быть записан в виде:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \vec{u} . \qquad (98)$$

Здесь: m_i – масса i-го тела, $\vec{v}_i$ - скорость i-го тела до соударения, $\vec{u}$ скорость образовавшегося после удара тела (или, другими словами, слипшихся тел).

[22] Принцип объединения тел в «систему» - произволен и определяется из удобства решения задачи.

Кроме того, в процессе абсолютно неупругого удара сумма полных механических энергий соударяющихся тел изменяется, расходуясь, в частности, на работу по объединению тел в одно, а также на выделение тепла (в результате пластической деформации или разрушения этих тел) и т.д. Таким образом, в процессе этого удара действуют и неконсервативные силы.

♦ *Абсолютно упругим соударением* называется такое соударение тел в процессе которого их суммарная полная механическая энергия не изменяется. Т.е. в системе этих тел действуют только консервативные силы. Поэтому, в случае абсолютно упругого удара закон сохранения импульса (96) должен быть дополнен законом сохранения полной механической энергии (72). Совместно эти два закона образуют систему двух уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{u}_i \tag{99а}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} + \sum_{i=1}^{N} П_i^{(\text{ДДо}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{u}_i^{\,2}}{2} + \sum_{i=1}^{N} П_i^{(\text{ППосле}}, \tag{99б}$$

где $П_i^{(\text{До})}$ и $П_i^{(\text{После})}$- потенциальные энергии, а $\vec{v}_i$ и $\vec{u}_i$- скорости i-го тела до и после столкновения соответственно.

2.3.2. Порядок решения задач.

1. Сделайте чертеж к задаче изобразив на нем тела до и после взаимодействия с указанием их масс и векторов их скоростей.
2. Определите, какие из этих тел (или все тела) образуют изолированную систему. При этом следует иметь в виду, что тела могут быть изолированы от внешнего воздействия в течение некоторого промежутка времени, а не всего времени их движения, или только вдоль одной координатной оси, а не в целом.
3. Выберите состояния системы этих тел до и после их взаимодействия, так чтобы в одном было бы все известно, в другом - фигурировала , бы искомая величина.
4. Запишите закон сохранения импульса в векторной форме для выбранных состояний «До» и «После». Если система изолирована только вдоль одной координатной оси, то закон сохранения импульса следует записать только для проекций импульсов тел на эту ось.
5. Выберите систему координат, направив одну из ее осей вдоль известного вектора импульса (вектора скорости). Если направление искомого импульса или соответствующего вектора скорости известно, то ось координат следует направить вдоль вектора искомого импульса.
6. Спроецируйте закон сохранения импульса на каждую из осей выбранной системы координат.
7. Если полученная система уравнений содержит число неизвестных больше, чем число уравнений, дополните ее. Для этого воспользуйтесь прежде всего законом сохранения и превращения механической энергии, а затем уже определениями неизвестных величин.

2.3.3. Примеры решения задач.

Задача 1.11. Бегущий со скоростью v_1=2.5 м/с [23] человек массой m_1=70 кг догоняет, движущуюся со скоростью v_2=2.0 м/с тележку массой m_2=120 кг и вспрыгивает на нее. Определить скорость (u) движения человека и тележки после этого, если человек и тележка двигались вдоль одной и той же горизонтальной прямой.

[23] Что составляет 9 км/ч

Дано:	
v_1=2.5 м/с	
m_1=70 кг	
v_2=2.0 м/с	
m_2=120 кг	
u=?	

Данная задача является примером задачи на абсолютно неупругое соударение тел. Человек и тележка после «столкновения» движутся как единое целое. Воспользуемся для решения этой задачи законом сохранения импульса.

На самом деле, и человек и тележка до взаимодействия, так же как и человек+тележка после взаимодействия, испытывают действие внешних сил – силы тяжести и силы реакции опоры. Однако так как движение горизонтально, эти силы являются силами действия и противодействия, поэтому согласно III закону Ньютона они равны и противоположны по направлению. Вследствие чего система тел, состоящая из человека и тележки является изолированной (сумма сил тяжести и реакции опоры равна нулю) в течение всего рассматриваемого интервала времени.

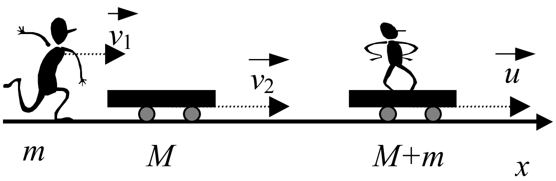


Рис.11

Выберем за состояние «До» (прыжка) состояние системы тел - человек и тележка - в момент времени, когда человек догнал тележку, а за состояние «После» (прыжка) – в момент времени, когда человек оказался на тележке неподвижным относительно нее. Тогда скорости человека и тележки в состоянии «До» известны, а скорость «После» требуется найти. Запишем закон сохранения импульса для этой системы тел:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}\,. \qquad (100)$$

Поскольку движение тел происходит вдоль прямой, ограничимся выбором одной оси координат, например, осью Ox, направив ее вдоль направления движения тел.

Спроецируем векторное равенство (100) на эту ось координат (см. рис.11):

$$m_1 v_2 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$$

и решим полученное уравнение относительно u. В результате найдем искомое значение скорости:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{70 \cdot 2.5 + 120 \cdot 2}{(70 + 120)} \approx 2.2 \quad \text{м/с}\,.$$

Задача 1.12. Тела массами m_1=1 кг и m_2=2 кг, двигаясь навстречу друг другу со скоростями v_1=3 м/с и v_2=5 м/с, соответственно, соударяются. Считая удар центральным и абсолютно упругим, найти скорости этих тел (u_1 и u_2) после соударения.

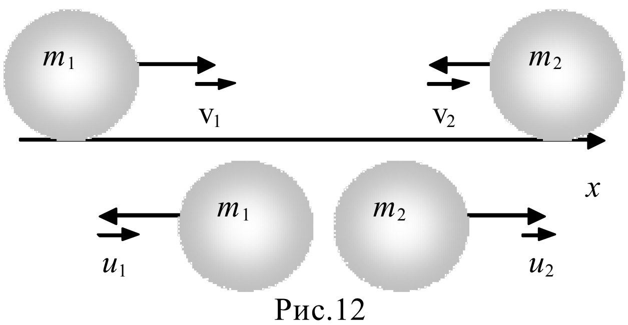


Рис.12

Дано:	
m_1=1 кг	
m_2=2 кг	
v_1=3 м/с	
v_2=5 м/с	
u_1=? u_2=?	

В данной задаче предполагается, что на тела не действуют никакие внешние силы. Тогда система этих двух тел изолирована.

Выбрав за состояние «До» – состояние первого и второго тела до соударения (суммарный вектор импульса тел в этом состоянии - $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$), а за состояние «После» – состояние тел после удара (суммарный вектор импульса тел в этом состоянии- $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$), запишем закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2\,. \qquad (101)$$

Направим координатную ось Ox вдоль вектора скорости первого тела до удара. Тогда, по условию задачи, вектор скорости второго тела до удара будет параллелен этой оси и направлен в противоположную сторону.

Спроецировав уравнение (101) на выбранную ось[24] и предполагая, что скорости тел до и после удара направлены в противоположные стороны (см. рис12.), получим

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_2 \ . \qquad (102)$$

Уравнение (102) содержит две неизвестных величины. Дополним его законом сохранения энергии (99б), т.к. удар абсолютно упругий. Поскольку на тела не действуют никакие силы, постольку потенциальная энергия тел может быть принята равной нулю. Тогда

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \ . \qquad (103)$$

Преобразуем уравнения (102) и (103). Собрав в левых частях этих равенств слагаемые, содержащие массу первого тела, а в правых – слагаемые, содержащие массу второго тела, и домножив (103) на 2, перепишем (102) и (103) к виду :

$$m_1(v_1 + u_1) = m_2(v_2 + u_2), \qquad (104)$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) \ . \qquad (105)$$

Выполнив деление уравнения (105) на уравнение (104) получим систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных:

$$\begin{cases} m_1(v_1 + u_1) = m_2(v_2 + u_2) \\ v_1 - u_1 = u_2 - v_2 \end{cases}. \qquad (106)$$

Решая систему уравнений (106), найдем значения скоростей тел после соударения:

$$u_1 = \frac{(m_2 - m_1)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2-1)\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 5}{1+2} \approx 7{,}67 \quad \text{м/с}$$

$$u_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{(1-2)\cdot 5 + 2\cdot 1\cdot 3}{1+2} \approx 0.33 \quad \text{м/с}$$

2.3.4. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.14. Граната, летящая со скоростью v=10 м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составляла 0.6 массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении со скоростью u_1=25 м/с. Найти скорость u_2 меньшего осколка.
(Ответ: u_2=12.5 м/с).

Задача 1.15. Молекула массой $m=64\cdot 10^{-27}$кг, двигаясь со скоростью v=500 м/с перпендикулярно стенке сосуда, абсолютно упруго соударяется с ней. Определить величину импульса P, переданного стенке сосуда в результате этого соударения. Считать массу пола много больше массы мяча.
(Ответ:$P=62\cdot 10^{-24}$кг·м/с).

Задача 1.16. Человек, стоящий на неподвижной платформе, бросает в горизонтальном направлении камень массой m_1=2 кг. Тележка с человеком покатилась назад со скоростью u_2=0.1 м/с. Определить скорость u_1 движения камня в первый момент времени после броска. Масса тележки вместе с человеком m_2=100 кг. (Ответ: u_1=5 м/с).

Задача 1.17. Найти среднюю (по времени) силу удара $\langle F\rangle$ мяча массой m=15 кг о пол, если время удара составило Δt=0.1 с. Скорость мяча в момент соприкосновения с полом v=20 м/с. Удар считать абсолютно упругим.
(Ответ: $\langle F\rangle$=6000 Н).

Задача 1.18. Тело массой m_1=1 кг, движущееся горизонтально со скоростью v=1 м/с, соударяется с неподвижным телом массой m_2=2 кг. Найти скорости тел после удара u_1 и u_2, если: а) удар абсолютно неупругий, б) удар абсолютно упругий. (Ответ: а) $u_1= u_2=u$=1/3 м/с, б) u_1=-1/3 м/с и u_2=2/3 м/с).

---

[24] В силу того, что удар центральный , а вектора скоростей тел до соударения параллельны - тела после удара будут двигаться вдоль той же прямой, что и до удара. Следовательно, ось Оу для решения задачи не потребуется, а скорости u_1 и u_2, будут проецироваться на ось Ох полностью.

2.4. Задачи на законы сохранения и превращения механической энергии и закон сохранения импульса.

Законы сохранения импульса (96) и сохранения и превращения полной механической энергии (65) содержат одну и ту же величину – скорость (см. также (97), (98), (99а) и (99б)). Поэтому они могут быть использованы совместно в дополнение друг друга для записи системы уравнений в том случае, когда число неизвестных в задаче превышает число уравнений, записанных с помощью одного из этих законов.

2.4.1. Порядок решения задач.

1. Выберите два состояния рассматриваемой системы тел так, чтобы параметры одного из них были бы заданы, а среди параметров другого – фигурировала бы искомая величина (или величины).
2. Разбейте весь промежуток времени, разделяющий эти два состояния, на интервалы такие, что параметры состояний рассматриваемой системы тел, отвечающих начальному и конечному моментам времени каждого из них можно связать с помощью закона сохранения импульса или закона сохранения и превращения полной механической энергии либо этих законов одновременно. (Например, в течение одного из этих интервалов времени действует неконсервативная сила, параметры которой неизвестны, но она является внутренней силой. Тогда для описания движения тел в этот интервал времени следует использовать закон сохранения импульса. Для описания движения в остальные интервалы времени, если работа всех неконсервативных сил, действующих в системе тел, допускает свое вычисление, следует использовать закон сохранения и превращения механической энергии.)
3. Используя эти два закона и в соответствии с описанным в п.2 (настоящего алгоритма) разбиением, запишите (так, как это описано в пп.2.2.1 и 2.3.1) систему уравнений, связывающую параметры состояний, выбранных в п.1 настоящего алгоритма. При этом в случае возможности одновременно воспользоваться законом сохранения импульса и законом сохранения и превращения полной механической энергии следует использовать тот закон или оба закона, добиваясь полноты получающейся при этом системы уравнений.

3.4.2. Примеры решения задач.

Пример 1.13. Найти на какое расстояние откатится после выстрела орудие массой M=2 т, если выстрел был произведен под углом α=30° к горизонту. Масса снаряда - m=10 кг, а его скорость (относительно земли) у дульного среза орудия - v=600 м/с. Коэффициент трения орудия - μ=1.5.

Дано:	
M=2 т m=10 кг α=30° v=600 м/с μ=1.5	
S=?	

В условиях данной задачи действуют две неконсервативные силы: сила давления пороховых газов – сила отдачи и сила трения ($F_{тр}$). Использовать для решения настоящей задачи только закон сохранения и превращения импульса (так же как и II закон Ньютона) – невозможно, поскольку для расчета силы давления пороховых газов нет данных. В то же время, именно благодаря действию силы отдачи, орудие после выстрела приобретает скорость (V) и кинетическую энергию. Однако действие силы отдачи ограничено временем движения снаряда внутри ствола орудия.

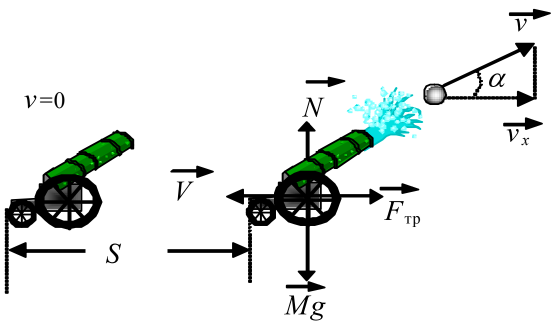


Рис.13

В соответствии с вышесказанным разобьем решение задачи на два этапа. Сначала рассмотрим движение орудия после того, как снаряд вылетел из его ствола. К этому моменту времени (в результате действия силы отдачи) орудие приобрело скорость V и начало свое движение. В процессе этого движения на орудие действует сила трения, что и приводит к его остановке. Причем величина силы трения может быть рассчитана как - $F_{тр} = \mu Mg$ (коэффициент трения задан условием задачи, а сила нормального давления в данном случае совпадает с силой тяжести). Поэтому для описания движения орудия в этот промежуток времени воспользуемся законом сохранения и превращения полной механической энергии. Выберем за начальное состояние – состояние орудия в момент вылета снаряда из его ствола, а за конечное состояние - состояние орудия в момент остановки. Так как положение орудия по высоте не изменяется, примем его потенциальную энергию равной нулю так (выбор начала отсчета потенциальной энергии произволен). Тогда полная механическая энергия начального состояния совпадает с кинетической энергией - $E_1 = \dfrac{MV^2}{2}$, а полная механическая энергия конечного состояния равна нулю – E_2=0. Таким образом, закон сохранения и превращения механической энергии (65) можно записать в виде:

$$0 - \frac{MV^2}{2} = A_{нк} = -F_{тр}S = -\mu MgS, \tag{107}$$

Здесь учтен тот факт, что сила трения и вектор перемещения орудия противоположно направлены, т.е. угол между ними равен 180°.

Уравнение (107) позволит определить пройденный путь, если скорость орудия после выстрела будет известна. Поэтому на втором этапе решения задачи найдем скорость V. Для этого воспользуемся законом сохранения импульса. Выберем за состояние «До» – состояние снаряда и орудия до выстрела. В этом состоянии импульсы снаряда и орудия равны нулю, а следовательно, равен нулю и их суммарный импульс. За состояние «После» выберем состояние в момент вылета снаряда из ствола орудия. В этом состоянии фигурирует необходимое для решения уравнения (107) значение скорости V. Для этих двух состояний сила отдачи является внутренней.[25] Однако в течение времени между этими состояниями, до и после выстрела, система снаряд+орудие не являлась изолированной вдоль оси Oy. Внешние силы – сила тяжести и сила реакции опоры, направленные вертикально вниз и вертикально вверх, соответственно, не компенсируют друг друга. Сила реакции опоры больше силы тяжести на величину вертикальной составляющей силы отдачи. В то же время вдоль оси Ox система тел снаряд+орудие является изолированной и вдоль этой оси закон сохранения импульса выполняется. Запишем закон сохранения импульса вдоль этой оси:

$$MV - mv_x = 0 \quad . \tag{108}$$

Здесь: MV- модуль импульса орудия, совпадающий с его проекцией на ось Ox, так как скорость орудия направлена строго горизонтально, mv_x – проекция импульса снаряда на ось Ox, v_x – x-я составляющая скорости снаряда. Из прямоугольного треугольника (см. рис.13)

$$v_x = v\operatorname{Cos}(\alpha) \ . \tag{109}$$

Подставляя (109) в (108) определим скорость орудия после выстрела:

$$V = \frac{m}{M} v\operatorname{Cos}(\alpha). \tag{110}$$

В свою очередь, после подстановки (110) в (107) и несложных преобразований найдем

[25] Следовательно, знание ее величины не нужно.

$$S = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{v^2}{2\mu g} \mathrm{Cos}^2(\alpha) = \left(\frac{10}{2000}\right)^2 \frac{600^2}{2\cdot 1.5\cdot 9.8}\cdot\left(\mathrm{Cos}\,30^\circ\right)^2 \approx 0.23 \quad \text{м}$$

Пример 1.14. Два абсолютно неупругих шарика (например, из пластилина) подвешены на двух нерастяжимых и невесомых нитях одинаковой длины – l=1 м. Массы шариков: m_1=10 г и m_2=30 г. Более легкий шарик отклоняют от вертикали на угол α=30° и отпускают, давая ему возможность свободно двигаться. На какую высоту (H) поднимутся шарики после соударения? Какое количество теплоты (Q) выделится в результате их столкновения? (Указания к решению задачи: размеры шариков следует считать много меньше длины нитей, сопротивлением воздуха пренебречь.)

Дано:
l=1 м
m_1=10 г=10^{-2} кг
m_2=30 г=$3\cdot 10^{-2}$ кг
α=30°

Q=? H=?

Ответим на первый вопрос задачи, приняв за начало отсчета высоты положение вертикально висящих шариков. (На рис.14 оно показано нижней пунктирной линией.) Для этого воспользуемся законом сохранения и превращения механической энергии (65). Выберем за начальное состояние - состояние слипшихся, в результате соударения, шариков (рис.14В) в тот момент времени, когда они начали свое совместное движение вверх, а неконсервативная сила[26], связанная с их пластической деформацией и обусловившая их слипание, прекратила свое действие. Для этого состояния кинетическая энергия шариков равна - $\frac{(m_1+m_2)u^2}{2}$, а их потенциальную энергию следует принять равной нулю, сделав соответствующий выбор начала отсчета высоты. В соответствии с последним полная механическая энергия начального состояния совпадает с кинетической энергией шариков:

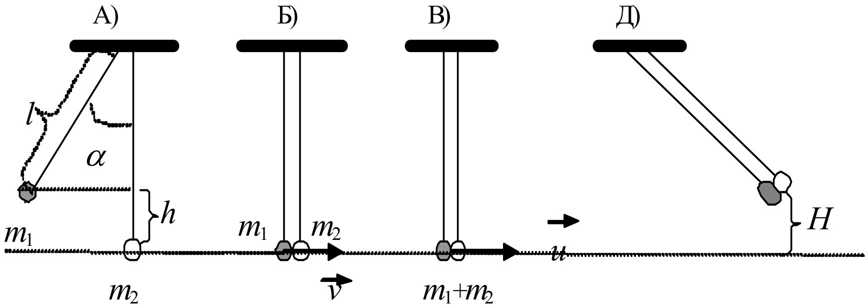


Рис.14

$$E_1 = \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} \ . \tag{111}$$

За конечное состояние выберем состояние шариков в тот момент времени, когда они поднялись (после удара) на наибольшую высоту и остановились (поэтому эта высота и наибольшая). В этом состоянии шарики обладают только потенциальной энергией, обусловленной силой тяжести. Тогда их полная механическая энергия равна

$$E_2 = (m_1+m_2)gH \ . \tag{112}$$

Поскольку между таким образом выбранными начальным и конечным состояниями шарики не испытывали действие неконсервативных сил (сопротивлением воздуха мы пренебрегаем), постольку и согласно (65) полные механические энергии начального и конечного состояний совпадают: E_1-E_2=Aнк=0. Записав это равенство с учетом (111), (112) и проведя сокращение на сумму масс, найдем:

$$H = \frac{u^2}{2g} \ . \tag{113}$$

Однако полученное соотношение (113) содержит неизвестную величину u – скорость шариков после удара. Для ее нахождения воспользуемся законом сохранения импульса.

[26] Параметры пластической деформации и силы, связанной с ней, неизвестны, поэтому расчет работы этой неконсервативной силы по формуле (72) невозможен, вследствие чего использовать только закон сохранения и превращения энергии для вычисления H невозможно.

Выбрав за состояние «До» - состояние шариков в момент их соприкосновения, а состояние «После»[27] - состояние шариков в момент времени, когда они слиплись и начали свое движение вверх со скоростью *u*, воспользуемся законом сохранения импульса (вдоль этого направлении действие внешних сил отсутствует). Поскольку в состоянии «До» второй шарик покоился, а первый двигался со скоростью *v* и так как скорости шариков до и после соударения параллельны, постольку закон сохранения импульса можно записать в виде

$$m_1 v = (m_1 + m_2)u \quad . \tag{114}$$

Решая уравнение (114) найдем выражение для скорости *u* через значение скорости второго шарика в начальный момент соударения

$$u = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v \quad . \tag{115}$$

Для определения значения скорости *v*, которую приобрел первый шарик в результате своего движения под действием силы тяжести, вновь воспользуемся законом сохранения и превращения полной механической энергии. В этом случае за начальное состояние выберем состояние шариков в начальный момент времени (рис.14А), когда второй шарик покоился и высота его положения относительно начала отсчета высоты равнялась нулю, т.е. и кинетическая и потенциальная, а следовательно, и полная механическая его энергии равнялись нулю. Первый шарик в этот момент времени был поднят на высоту $h=l(1\text{-Cos}(\alpha))$, но еще не начал своего движения, т.е. его скорость и кинетическая энергия равнялись нулю, а следовательно, его полная механическая энергия в этом состоянии совпадала с его потенциальной энергией и была равной – $m_1gh(=m_2gl(1\text{-Cos}(\alpha))$ (см. рис.14А). С учетом всего выше сказанного и того, что полная механическая энергия суммы тел равняется сумме их полных механических энергий, имеем

$$E_1^{(0)} = m_1 g l\left(1 - \text{Cos}(\alpha)\right) \quad , \tag{116}$$

где $E_1^{(0)}$ - полная механическая энергия в начальный момент времени. За конечное состояние на этом этапе решения задачи выберем состояние шариков в момент их соприкосновения. В этом случае оба шарика висят вертикально, следовательно, находятся на нулевой отметке высоты и их потенциальные энергии равны нулю. При этом, как уже отмечалось выше, второй шарик покоится, а первый движется со скоростью *v*. Тогда полная механическая энергия шариков в этом конечном состоянии совпадает с кинетической энергией первого шарика.

$$E_2^{(0)} = \frac{m_1 v^2}{2} \quad . \tag{117}$$

Подставляя (116) и (117) в выражение закона сохранения и превращения механической энергии (65) и учитывая, что неконсервативные силы при переходе из таким образом выбранных начального в конечное состояния отсутствуют, т.е. $A_{\text{нк}}=0$, после не сложных преобразований найдем, что

$$v = \sqrt{2gl\left(1 - Cos(\alpha)\right)} \quad . \tag{118}$$

Подставляя (118) в (115), а полученное в результате выражение в (111) окончательно имеем:

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 l\left(1 - \text{Cos}(\alpha)\right) = \\ &= \left(\frac{10^{-2}}{3 \cdot 10^{-2}}\right)^2 \cdot 1 \cdot \left(1 - \text{Cos}(30^\circ)\right) = \frac{1}{18} \approx 0.056 \quad \text{м} \end{aligned} \quad . \tag{119}$$

Теперь ответим на второй вопрос задачи. Количество теплоты, выделившееся при ударе, равняется работе неконсервативных сил. Для этого в очередной раз воспользуемся

---

[27] Обратите внимание, что выбранное таким образом состояние «После» совпадает с выбранным ранее начальным состоянием.

законом сохранения и превращения механической энергии (65). Поскольку, неконсервативные силы действуют только в течение времени удара, а в остальное время отсутствуют, постольку начальное и конечное состояния могут быть выбраны произвольно, лишь бы начальное состояние предшествовало удару, а конечное было бы после него. В соответствии с этим за начальное состояние выберем уже известное нам состояние шариков в начальный момент времени. Энергия этого состояния задается соотношением (116). За конечное состояние выберем состояние шариков в момент времени, когда они поднимутся (после удара) на наибольшую высоту. В свою очередь энергия этого состояния определяется равенством (112). Подставляя (119) в (112), а полученное выражение и выражение (116) в закон сохранения и превращения механической энергии (65) и приравнивая работу неконсервативных сил количеству теплоты, получим ответ на второй вопрос задачи:

$$Q=\left|A_{\text{нк}}\right|=m_1gl(1-\mathrm{Cos}(\alpha))-(m_1+m_2)g\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 l(1-\mathrm{Cos}(\alpha))$$

или

$$Q=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}gl(1-\mathrm{Cos}(\alpha))=\frac{10^{-2}\cdot 3\cdot 10^{-2}}{10^{-2}+3\cdot 10^{-2}}\cdot 9.8\cdot 1\cdot\left(1-\mathrm{Cos}\left(30^\circ\right)\right)=3.67510^{-2}\quad \text{Дж}$$

2.4.3. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.19. Конькобежец массой M=70 кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой m=3 кг со скоростью v=8 м/с. На какое расстояние S откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед μ=0.002? (Ответ: S=0.3 м).

Задача 1.20. Пуля массой m=9 г, летящая горизонтально, попадает в шар массой M=9 кг, подвешенный на невесомом стержне, и застревает в нем. Расстояние от центра шара до точки подвеса l=1 м. Найти на какой угол α отклонится стержень с шаром, если скорость пули v=550 м/с. (Ответ: α=10°).

Задача 1.21. Тело соскальзывает с наклонной плоскости высотой h=10 м и углом наклона α=30° и у подножья наклонной плоскости абсолютно неупруго сталкивается с другим телом той же массы, после чего тела проходят до точки своей остановки расстояние S=10 м. Считая коэффициент трения постоянным на всем протяжении пути, определить его значение. (Ответ: μ=0.44).

Задача 1.22. Ядро массой m=25 кг, двигаясь горизонтально со скоростью v=300 м/с попадает в вагон с песком, который может свободно двигаться по рельсам, и застревает в нем. Определить количество теплоты Q, выделившееся в результате этого, если масса вагона с песком M=3 т.

(Ответ: Q= $1.12\cdot 10^6$ Дж).

3. Вращательное движение.

К задачам на вращательное движение относятся задачи, по условию которых хотя бы одно из взаимодействующих тел вращается. При этом ось вращения не обязательно неподвижна, а может в свою очередь двигаться поступательно. В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь тех задач, в которых ось вращения единственна (даже если вращающихся тел несколько). В этом случае вектора всех угловых переменных направлены параллельно друг другу и вдоль оси вращения либо вверх, либо вниз, а их проекции на эту ось совпадают со значениями их модулей, взятыми либо с положительным, либо с отрицательным знаком, соответственно.

3.1. Основные понятия и соотношения

Так же, как и механика поступательного движения механика вращательного движения может быть разбита на два раздела: кинематика вращательного движения и динамика вращательного движения.

Кинематика вращательного движения. Основными законами кинематики вращательного движения являются уравнения равнопеременного вращения:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{120}$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \tag{121}$$

и определения угловых скорости и ускорения

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{122}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{123}$$

Здесь: ω_0 – угловая скорость движения в начальный момент времени (т.е при t=0), ε - угловое ускорение, которое в случае равнопеременного вращения, не изменяется во времени и может быть больше нуля (ε>0 – равноускоренное вращение), меньше нуля (ε<0 – равнозамедленное вращение) или равным нулю (ε=0 – равномерное вращение), ω - угловая скорость, φ - угловой путь (или, что то же самое, угол поворота), t – интервал времени, отсчитываемый от некоторого начального момента. Как и в случае поступательного движения, начальный момент времени может быть выбран исходя из удобства решения задачи (так, как время инвариантно относительно выбора начала отсчета).

Уравнения (120)–(123) следует дополнить равенствами, устанавливающими *связь линейных и угловых переменных*:

$$S = \varphi R \ , \tag{124}$$

$$v = \omega R \ , \tag{125}$$

$$a_\tau = \varepsilon R \ , \tag{126}$$

$$a_n = \omega v = \omega^2 R\left(= \frac{v^2}{R}\right) \ ,$$

где R – длина радиус-вектора, проведенного от оси вращения к вращающейся точке и лежащего в плоскости ее вращения. Напомним, что a_τ и a_n – тангенциальное и нормальное ускорения.

Динамика вращательного движения. Основными законами и определениями этого раздела (механики вращательного движения) являются:

Момент силы – векторная физическая величина, характеризующая силовое действие в случае вращения, численно равная

$$M = Fd$$

и направленная вдоль оси вращения так, чтобы если смотреть с конца вектора ей соответствующего ($\overrightarrow{M}$), вращение казалось бы против часовой стрелки. Здесь: d - *плечо силы*, равное кратчайшему расстоянию от оси вращения до линии действия силы (т.е. длине перпендикуляра, опущенного от оси вращения на линию действия силы), F – модуль силы, действующей на тело.

Основное уравнение динамики вращательного движения (аналог II закона Ньютона)

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{M}_i = J\vec{\varepsilon}; \tag{127}$$

где $\overrightarrow{M_i}$ - вектор момента i-й силы относительно оси вращения[28], J – <u>*момент инерции тела*</u> относительно той же оси, определяемый в общем случае как

$$J = \int\limits_{\substack{\text{по всему} \\ \text{объему тела}}} R^2 dm \ . \tag{128}$$

Результат интегрирования соотношения (128) зависит от формы тела, распределения массы по его объему, а также от расположения оси вращения, относительно которой рассчитается J. Ряд примеров формул для расчета момента инерции симметричных однородных тел относительно оси их симметрии приведены в таблицу №1.

<u>*Закон сохранения момента импульса*</u>: Суммарный вектор момента импульса изолированной (от внешнего воздействия) системы остается неизменным. Этот закон может быть переформулирован в более удобной для решения задач форме: **Если на некоторую совокупность тел (систему тел) не действуют моменты внешних сил или их действие компенсировано, то векторная сумма моментов импульса этих тел «До» (до взаимодействия) равна векторной сумме их моментов импульсов «После» (после взаимодействия)** –

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i^{(\text{До})} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i^{(\text{После})} \ , \tag{129}$$

где $\vec{L}_i^{(\text{До})}$ и $\vec{L}_i^{(\text{После})}$ - вектора моментов импульса i-ого тела до и после взаимодействия, соответственно, N – число тел объединенных в «систему»[29]. При этом следует помнить, что <u>*момент импульса тела*</u> равен произведению момента инерции (см. таблицу №1) на вектор угловой скорости вращения этого тела:

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \tag{130}$$

и направленный вдоль оси вращения так, чтобы если смотреть с его конца, вращение казалось бы против часовой стрелки.

Для вращательного движения, так же, как и для поступательного движения, выполняется <u>*закон сохранения и превращения механической энергии*</u> (63). При этом запись выражений для потенциальной энергии не изменяется, а <u>*кинетическая энергия вращающегося и катящегося тела*</u> могут быть вычислены по формулам:

$$K = \frac{J\omega^2}{2} \tag{131}$$

и

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \ , \tag{132}$$

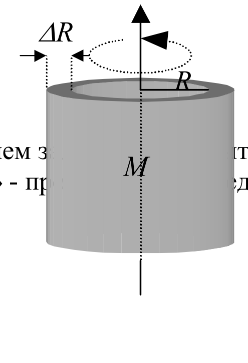
соответственно. Здесь: J и ω – момент инерции и угловая скорость тела относительно оси его вращения, которая в случае катящегося тела движется поступательно со скоростью v, m – масса тела.

<u>*Работа постоянного момента силы*</u>:

$$A = M\varphi \ , \tag{133}$$

где φ - угол поворота тела вокруг оси, относительно которой рассматривается действие (рассчитан) момента силы M.

Таблица №1

Тело	Момент инерции относительно оси симметрии
Обруч или труба (ΔR<<R): 	

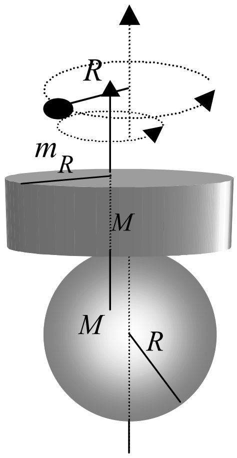
[28] Ось вращения, если не задается условием з... ть выбрана произвольно.
[29] Принцип объединения тел в «систему» - пр... деляется из удобства решения задачи.

$$J = MR^2$$

Диск:

$$J = \frac{1}{2} MR^2$$

Материальная точка (движущаяся по окружности радиуса R):



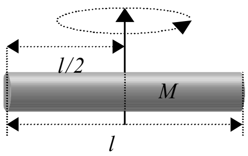
$$J = mR^2$$

Шар:

$$J = \frac{2}{5} MR^2$$

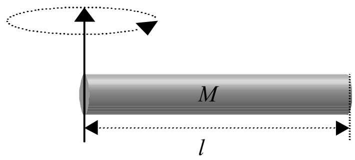
Стержень:

а)



$$J = \frac{1}{12} Ml^2$$

б)



$$J = \frac{1}{3} Ml^2$$

3.2. Порядок решения задач.

Поскольку введение угловых переменных это лишь другой (более удобный и поэтому простой в случае вращения) способ описания движения, постольку типы задач и порядок их решения совпадают с рассмотренными в случае поступательного движения. В связи с этим отметим лишь отличительные черты решения таких задач:

1. Определите ось вращения в соответствии с условием задачи. Если ось вращения не задана, ее можно выбрать произвольно, в том числе и движущейся поступательно.

При этом наиболее рационально выбрать ось вращения совпадающей с осью симметрии вращающегося тела (см.табл.№1).

2. Определите радиус кривизны траектории движения тела (или точки).

3. Определите плечи сил, действующих на каждое тело, и запишите выражения для их моментов.

4. Определите моменты инерции движущихся тел.

5. Определите вращается тело или катиться и запишите выражение для его кинетической энергии.

Далее, последовательность решения задач совпадает с описанной:

- в п.п.1.2, если задача на кинематику вращательного движения, с заменой соотношений (1)-(4) на соотношения (118)-(121).
- в 3.1.2, если задача на динамику вращательного движения, с заменой уравнения $\text{II}^{\underline{\text{го}}}$ закона Ньютона на основное уравнение вращательного движения (127) для каждого из вращающихся тел
- в 3.2.2, если задача на закон сохранения и превращения полной механической энергии, с учетом выражения для кинетической энергии вращающегося (131) или катящегося тела (132), и использованием выражения (133) для расчета работы момента неконсервативной силы.
- 3.3.2, если задача на закон сохранения момента импульса, с единственной заменой вектора импульса на вектор момента импульса (см.(129),(130))

6. Полученную систему уравнений решить при необходимости дополнив соотношениями (122)-(125), а также определениями сил, входящих в нее.

4.3 Примеры решения задач.

Пример 1.16 Однородный диск радиуса R=5 м и массой m=100 кг вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр перпендикулярно его плоскости, так, что угол поворота изменяется по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где A- некоторая постоянная величина, B=10 рад/с, C=-5 рад/с^2. Определить результирующий момент сил (M), действующих на диск и полное ускорение (a_1) точки, находящейся на расстоянии r=R/3 от его центра, в момент времени t_1=0.3 с после начала вращения.

Дано:
Диск
R=5 м
m=100 кг
$\varphi = A + Bt + Ct^2$ B=10 рад/с
C=-5рад/с^2
r=R/3
t_1=0.3 с

M=? a_1=?

Ось вращения диска определена условием задачи (см. рис.15). Найдем, относительно этой оси, суммарный момент сил (M), действующих на диск. Согласно основному закону динамики вращательного движения (127):

$$M = J\varepsilon, \qquad (134)$$

где J – момент инерции диска относительно оси вращения, которая, как следует из условия задачи, совпадает с его осью симметрии, поэтому (см. табл. №1)

$$J = \frac{1}{2}mR^2 \; ; \qquad (135)$$

ε - угловое ускорение, относительно той же оси, которое можно вычислить, как вторую производную по времени от угла поворота (121):

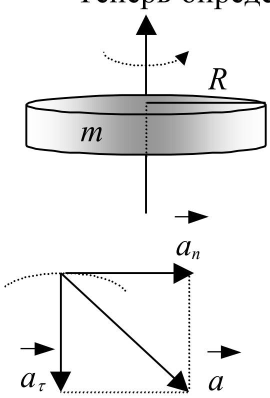
$$\varepsilon = \frac{d^2}{dt^2}\left(A + Bt + Ct^2\right) = \frac{d}{dt}\left(B + 2Ct\right) = 2C \; . \qquad (136)$$

Подставляя, (135) и (136) в (134) найдем ответ на первый вопрос задачи:

$$M = \frac{1}{2}mR^2 2C = mR^2C = 100\cdot(5)^2\cdot(-5) = -12.5\cdot10^3 \quad \text{Н}\cdot\text{м} \; .$$

Полученное значение суммарного момента сил – отрицательно. Это указывает на то, что момент сил, действующих на диск, тормозит его вращение и поэтому направлен против против оси вращения.

Теперь определим значение ускорения движения точки, удаленной от оси вращения на расстояние $r=R/3$. Оно складывается из двух составляющих:



а)

Рис.15

б)

- тангенциальной (т.е. касательной к траектории движения) (124), которая с учетом (135), равна

$$a_\tau = \varepsilon r = \varepsilon \frac{R}{3} = 2C\frac{R}{3}, \qquad (137)$$

- и нормальной (т.е. перпендикулярной к траектории) (125):

$$a_n = \omega^2 r = \omega \frac{R}{3}. \qquad (138)$$

Для определения последнего необходимо найти значение угловой скорости (ω) вращения диска. Согласно (120)

$$\omega = \frac{d}{dt}\varphi = \frac{d}{dt}\left(A + Bt + Ct^2\right) = B + 2Ct \ . \qquad (139)$$

Подставляя в (138) значение времени t_1, запишем выражение для угловой скорости в этот момент времени:

$$\omega_1 = B + 2Ct_1 \ . \qquad (140)$$

Тогда, после подстановки (140) в (138) получим выражение для нормальной составляющей ускорения при $t=t_1$:

$$a_n^{(1)} = \left(B + 2Ct_1\right)^2 \frac{R}{3}. \qquad (141)$$

Поскольку эти две составляющие ускорения - взаимно перпендикулярны, постольку значение полного ускорения (a_1) в момент времени $t=t_1$ определяется теоремой Пифагора (см. рис.15б):

$$a_1 = \sqrt{a_\tau^2 + \left(a_n^{(1)}\right)^2} = \sqrt{\left(2C\frac{R}{3}\right)^2 + \left[\left(B+2Ct_1\right)^2 \frac{R}{3}\right]^2} = \frac{R}{3}\sqrt{4C^2 + \left(B+2Ct_1\right)^4} =$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\sqrt{4\cdot(-5)^2 + \left(10+2\cdot(-5)\cdot 0.3\right)^4} \approx 50.01\text{м/с}^2$$

Пример 1.17 На вершине наклонной плоскости с двумя скатами закреплен блок в виде диска массой m_3=1.5 кг , который может вращаться во круг своей оси симметрии без трения. Через блок перекинута невесомая нерастяжимая нить к противоположным концам которой прикреплены два груза массами m_1=2 кг и m_2=3 кг. Грузы могут скользить по наклонной плоскости , причем коэффициент их трения о поверхность наклонной плоскости одинаков и равен μ=0.01. Определить ускорение (a) движения грузов, если груз массой m_1 находится на скате, составляющем с горизонтом угол α=30°, а массой m_2 – на скате с углом β=45°.

Дано:
m_1=2 кг
m_2=3 кг
μ=0.01
α=30°
β=45°
m_3=1.5 кг
Блок - *диск*
a=?

Данная задача аналогична задаче разобранной в примере 1.8. Отличие этих задач заключается лишь в том, что в примере 1.8 блок считался невесомым, а в рассматриваемой задаче - блок не только обладает массой, но имеет определенную форму и размер.

Поскольку ускорение неизвестно, постольку выберем его направление произвольно (так же, как и в случае примера 1.8). Затем, зная направление движения, расставим силы, действующие на каждое из тел (включая и блок) и определим направление оси вращения блока. Последняя направлена перпендикулярно плоскости чертежа от нас (т.е. за чертеж) и совпадает с осью симметрии блока.

На первое и второе тела действуют, как и в примере 1.8, силы: трения, тяжести, реакции опоры и натяжения нити. На блок действуют силы: тяжести и реакции опоры (со стороны оси на которой он закреплен и относительно которой он вращается), приложенные к одной и той же точке - центру симметрии диска (так, как через последний проходит закрепленная ось вращения), а также силы натяжения нити $\vec{T}'_1$ и $\vec{T}'_2$, направленные по касательной к боковой поверхности диска, и , равные по модулю силам натяжения нити, приложенным к телам[30]. Всилу последнего, модули сил натяжения нити, действующие слева и справа от блока, будем обозначать символами T_1 и T_2, соответственно, независимо от того приложены ли они к телам или блоку.

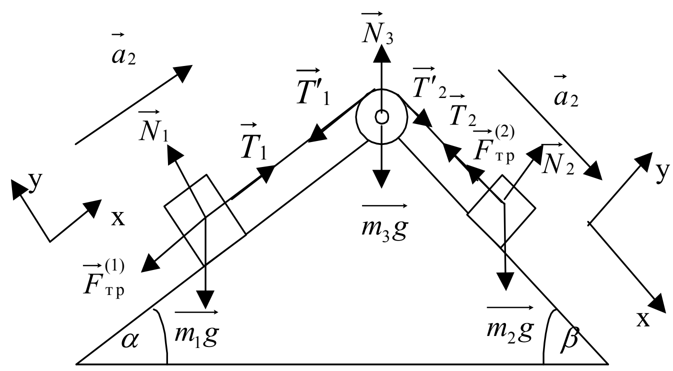


Рис.16

Всилу нерастяжимости нити, ускорения движения грузов равны по величине - $\left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{a}_2\right| = a$, хотя и различны по направлению.

Выберем системы координат. Так, как ускорения грузов направлены под углом друг к другу, то каждому из них сопоставим свою систему координат (см. рис. 16 и решение задачи в примере 1.8). В случае же блока ограничимся выбором одной[31] координатной оси совпадающей с осью его вращения (не только пространственно, но и по направлению).

Последовательность составления на основе II закона Ньютона уравнений для описания поступательно движущихся первого и второго тел совпадает с тем, как это было сделано в примере 1.8. Получающиеся при этом уравнения также совпадают с найденными в нем. Поэтому ограничимся подробным рассмотрением лишь вращения блока (диска).

Для описания движения блока воспользуемся основным законом динамики вращательного движения (127). При этом, следует иметь в виду, что ось вращения определена условием задачи (и что весьма важно совпадает с осью его симметрии). По этому момент инерции блока (в форме диска) относительно оси вращения определяется, как (см. табл.№1)

$$J = \frac{1}{2} m_3 R^2 \ . \qquad (141)$$

В свою очередь, моменты сил натяжения нити слева и справа от блока равны:

$$M_1 = T_1 R \quad \text{и} \quad M_2 = T_2 R \ , \qquad (142)$$

где R – значение радиуса блока, совпадающее со значением длины плеч сил T_1 и T_2, т.к. последние касательны к боковой поверхности блока. При этом вектора моментов этих сил: $\overrightarrow{M_1}$ и $\overrightarrow{M_2}$, направлены вдоль оси вращения, т.е. имеют единственную не равную нулю проекцию на координатную ось, совпадающую с осью вращения. Значения этих проекций совпадают со значениями модулей им соответствующих векторов, но отличаются знаками. Так момент силы T_1 **препятствует вращению** блока, поэтому его проекция на ось вращения - **отрицательна**, а момент силы T_2 **способствует вращению**, поэтому его проекция на ту же ось – **положительна**. С учетом всего вышесказанного запишем основной закон динамики вращательного движения (127) в проекции на ось вращения блока. Подставляя (141) и (142) в (127), учитывая различие знаков проекций векторов $\overrightarrow{M_1}$ и $\overrightarrow{M_2}$, а также тот факт, что относительно оси вращения моменты силы тяжести блока и силы реакции опоры равны нулю. По-

[30] Всилу III закона Ньютона.
[31] Всилу того, что его ось вращения единственна.

следнее обусловлено тем, что плечи этих сил относительно оси вращения равны нулю. Получим[32]:

$$\frac{1}{2}m_3R^2\varepsilon = T_2R - T_1R\,. \tag{143}$$

Теперь запишем II закона Ньютона для первого и второго тела (см. пример 1.8):

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \overrightarrow{m_1g} + \vec{F}^{(1)}_{\text{тр}} + \vec{N}_1\ ,$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + \overrightarrow{m_2g} + \vec{F}^{(2)}_{\text{тр}} + \vec{N}_2\ .$$

Спроецировав эти законы на координатные оси систем координат, выбранных для первого и второго тел (см. (55-58)), подставив в полученные уравнения выражения для сил трения (59) и (60), а затем осуществив подстановки, подробно описанные при решении задачи в примере 1.8, найдем уравнения (см.(61) и (62)), которые совместно с равенством (143) образуют систему уравнений:

$$\frac{1}{2}m_3R^2\varepsilon = T_2R - T_1R\ , \tag{145а}$$

$$m_1a = T_1 - m_1g\mathrm{Sin}(\alpha) - \mu m_1g\mathrm{Cos}(\alpha)\,, \tag{145б}$$

$$m_2a = -T_2 + m_2g\mathrm{Sin}(\beta) - \mu m_2g\mathrm{Cos}(\beta)\,. \tag{145в}$$

Однако, полученная система уравнений (145а-в) не полна. Она содержит лишнюю неизвестную величину – угловое ускорение (ε). Выразим ε через тангенциальную составляющую линейного ускорение (a_τ) движения (вращения) точки на боковой поверхности блока. Значение a_τ совпадает со значением ускорения движения нити, а следовательно, и со значениями ускорений движения грузов – $a(=a_\tau)$. Тогда, т.к. $a_\tau = a$ и в соответствии с (124), $\varepsilon=a/R$, что позволяет переписать (после сокращения на R в (145а)) систему уравнений (145) к виду:

$$\frac{1}{2}m_3a = T_2 - T_1\ , \tag{146а}$$

$$m_1a = T_1 - m_1g\mathrm{Sin}(\alpha) - \mu m_1g\mathrm{Cos}(\alpha)\,, \tag{146б}$$

$$m_2a = -T_2 + m_2g\mathrm{Sin}(\beta) - \mu m_2g\mathrm{Cos}(\beta)\,. \tag{146в}$$

Решая систему уравнений (146) относительно ускорения, аналогично тому, как это было сделано в примере 1.8 (надо сложить все три уравнения), имеем[33]:

$$a = g\frac{m_2\mathrm{Sin}(\beta) - m_1\mathrm{Sin}(\alpha) - \mu\left(m_2\mathrm{Cos}(\beta) + m_1\mathrm{Cos}(\alpha)\right)}{\left(m_2 + m_1 + \frac{1}{2}m_3\right)} =$$

$$= 9.8\cdot\frac{3\cdot\mathrm{Sin}\left(45^\circ\right) - 2\cdot\mathrm{Sin}\left(30^\circ\right) - 0.01\cdot\left(3\cdot\mathrm{Cos}\left(45^\circ\right) + 2\cdot\mathrm{Cos}\left(30^\circ\right)\right)}{\left(3 + 2 + \frac{1}{2}\cdot 1.5\right)} \approx 1.83\ \text{м/с}^2$$

Пример 1.18 Шар массой m=3 кг скатывается без проскальзывания с вершины наклонной плоскости высотой h=4 м без начальной скорости. Длина ската наклонной плоскости – l=8 м, а значение коэффициента трения качения (μ) тела одинаково на всем протяжении его пути и равно 0.1. Определить а) скорость (v) шара у подножья наклонной плоскости; б) расстояние (S) которое пройдет шар от подножья наклонной плоскости до своей полной остановки.

---

32 Обратите внимание, если блок невесом, т.е. m_3=0, то силы T_1 и T_2 равны по модулю, как это считалось при решении задачи в примере №8.

33 В этой задаче можно определить и значения сил натяжения нити слева и справа от блока. Для этого необходимо подставить найденное значение ускорения в уравнения (146б, в).

Дано:	
h=4 м	
l=8 м	
v_0=0	
v_2=0	
μ=0.1	
Шар	
v=?, S=?	

Данная задача так же, как и ее решение, аналогична задаче разобранной в примере 1.12 (даже сохранены численные данные, сравните). Однако теперь тело не соскальзывает, а скатывается с наклонной плоскости. Поэтому прежде чем приступить к ее решению выберем ось вращения шара. Последняя не определена условием задачи, поэтому может быть выбрана произвольно. Выберем ее, проходящей через центр шара перпендикулярно плоскости его движения (т.е. перпендикулярно плоскости рисунка). В этом случае шар будет одновременно вращаться вокруг так выбранной оси и двигаться поступательно со скоростью ее перемещения (v). В результате чего, кинетическая энергия шара будет складываться из кинетической энергии его поступательного движения (65) и кинетической энергии его вращения (132):

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \ , \tag{147}$$

где J– момент инерции шара относительно оси вращения, совпадающей с осью его симметрии, (см. табл.№1)

$$J = \frac{2}{5} mR^2 \ ; \tag{148}$$

ω - угловая скорость вращения шара (относительно той же оси, что и момент инерции); v – скорость движения (поступательного) центра масс шара, через который проходит выбранная ось вращения; m – масса шара.

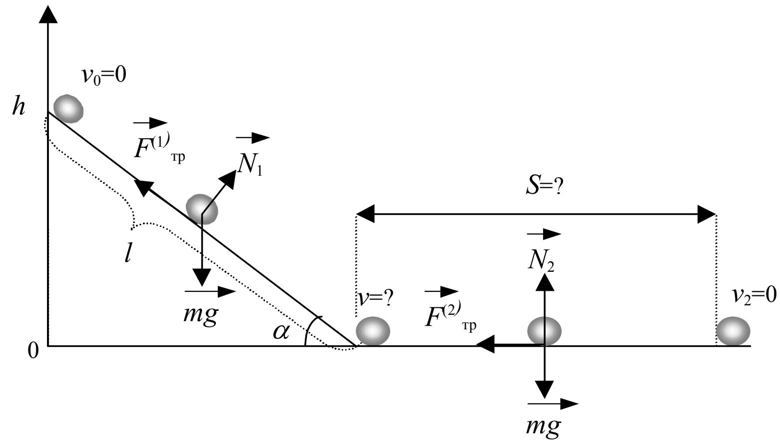


Рис.17

В заключении рассмотрения особенностей решения данной задачи, связанных с вращательным движением, учтем и тот факт, что скорость поступательного движения центра масс шара и линейная скорость вращения (относительно выбранной оси) точек, лежащих на поверхности шара, совпадают по величине. Тогда, в соответствии с (123)

$$\omega = \frac{v}{R}. \tag{149}$$

Подставляя (148) и (149) в (147), после сокращения на R^2, запишем выражение для кинетической энергии катящегося шара:

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} = \frac{7}{10} mv^2 \ . \tag{150}$$

Дальнейший ход решения задачи совпадает с ходом решения задачи, разобранной в примере 1.12.

Выберем за начало отсчета высоты, а, следовательно, и потенциальной энергии силы тяжести, уровень подножия наклонной плоскости, разобьем решение задачи на два этапа. (Поскольку величина работы силы трения зависит от формы траектории.)

а) На первом этапе найдем значение скорости шара у подножия наклонной плоскости. Для этого выберем за начальное состояние шара его состояние на вершине наклонной плоскости в момент начала скатывания. Учитывая то факт, что шар скатывает без начальной скорости, имеем:

$$E_1 = mgh\,, \qquad (151)$$

где E_1 – полная механическая энергия шара в начальном состоянии.

За конечное состояние выберем состояние шара у подножья наклонной плоскости. В этом состоянии его полная механическая энергия E_2 совпадает с кинетической энергией качения (150):

$$E_2 = \frac{7}{10}mv^2 \quad . \qquad (152)$$

Записав выражение для работы силы трения при движении шара с вершины к подножью наклонной плоскости:

$$A_{\text{нк}} = -\mu mgl Cos(\alpha)\,. \qquad (153)$$

где α - угол наклонной плоскости, и подставив (151)-(153) в выражение для закона сохранения и превращения механической энергии (63), получим уравнение для нахождения v:

$$\frac{7}{10}mv^2 - mgh = -\mu mgl Cos(\alpha)\,. \qquad (154)$$

Определив значение косинуса угла, как и при решении задачи в примере 1.12: $\mathrm{Cos}(\alpha) = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2}$, после сокращения массы , найдем ответ на первый вопрос задачи[34]:

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh\left(1 - \mu\sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 - 1}\right)} = \sqrt{\frac{10}{7}\cdot 9.8\cdot 4\cdot\left(1 - 0.1\cdot\sqrt{\left(\frac{8}{4}\right)^2 - 1}\right)} \approx 6.8 \text{ м/с} \quad . \qquad (155)$$

б) На втором этапе решения задачи найдем путь S , пройденный шаром от подножья наклонной плоскости до точки его полной остановки. Очевидно, что согласно закону сохранения и превращения механической энергии, значение этого пути не должно зависеть от того катилось ли тело или соскальзывало. Продемонстрируем это. Выберем за начальное состояние – состояние шара у подножья наклонной плоскости

$$E_1' = \frac{7}{10}mv^2\left(\equiv E_2\right)\,, \qquad (156)$$

а за конечное состояние – состояние шара в момент его остановки, когда и высота подъема и скорость тела равнялись нулю, т.е. E'_2=0. После чего запишем выражение закона сохранения и превращения механической энергии (63) на горизонтальном участке пути (подробно см. пример 1.12):

$$E_2' - E_1' = -\frac{7}{10}mv^2 = A_{\text{нк}} - \mu mgS\,. \qquad (157)$$

[34] Обратите внимание, что скорость поступательного движения катящегося шара оказалась меньше, чем найденное значение в примере №12, в котором тело той же массы , но соскальзывало с той же высоты при тех же значениях коэффициента трения и угла склона. Это обусловлено тем, что в случае качения часть потенциальной энергии затрачивается на сообщение телу (шару) угловой скорости (а не только скорости поступательного движения, как это было в примере №12).

Подставив в (157) найденное ранее выражение (155) для v и произведя сокращение на массу, найдем ответ на второй вопрос задачи[35]:

$$S = h\left(\frac{1}{\mu} - \sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 - 1}\right) =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{0.1} - \sqrt{\left(\frac{8}{4}\right)^2 - 1}\right) \approx 33{,}07 \quad \text{м}$$

Пример 1.19 Горизонтальная платформа в форме диска массой m_1=100 кг и радиуса R=2 м вращается с угловой скоростью $\omega_1=30\pi$ рад/с ($\pi\approx3.14$) вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через ее центр. На краю платформы неподвижно (относительно платформы) стоит человек массой m_2=70 кг. Определить с какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться платформа после того, как человек перейдет к ее центру. Определить средний момент (относительно оси вращения) силы с которой человек воздействовал на платформу, если за время его перемещения платформа совершила полтора оборота. Человека считать точечной массой.

Дано:
m_1=100 кг
R=2 м
$\omega_1=30\pi$ рад/с
m_2=70 кг
$\varphi=3\pi$ рад
Диск

ω_2=? M=?

При записи «Дано» было учтено, что поворот платформы на полтора оборота соответствует углу ее поворота - $\varphi=3\pi$ рад.

Как и в случае решения любой другой задачи на вращательное движения, прежде всего следует определить ось вращения. Согласно условию задачи она совпадает с осью симметрии платформы (диска). Далее все рассуждения следует понимать относительно именно этой оси.

Данная задача является примером задач смешанного типа для решения которых следует использовать закон сохранения момента импульса и закон сохранения и превращения механической энергии. Рассмотрим первый этап решения задачи. На тела (платформу и человека) действуют внешние силы: силы тяжести человека и платформы, а также две силы реакции опоры, вызванные давлением платформы на ее крепление к оси вращения и искривлением этой оси за счет действия силы тяжести человека. Однако, сумма моментов этих сил (сил тяжести человека и платформы, а также сил противодействия им со стороны оси вращения) по III закону Ньютона равна нулю. Таким образом, система платформа–человек является изолированной от внешнего воздействия. По этому для нахождения значения скорости вращения ω_2 воспользуемся законом сохранения момента импульса (129). Для этого выберем за состояние «До» состояние системы платформа-человек в тот момент времени, когда человек находился на краю платформы и они вращались с одинаковой угловой скоростью - ω_1. Запишем суммарный момент импульса рассматриваемой системы в этот момент времени:

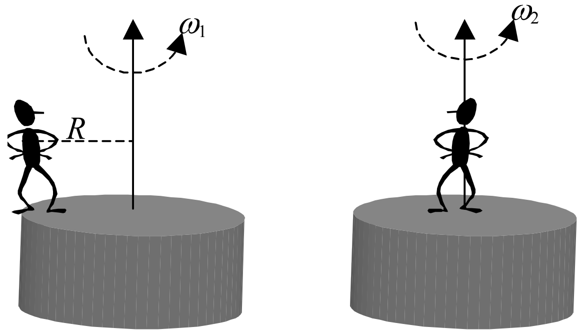


Рис.18

$$L_1 = L^{(1)}_{\text{платф}} + L^{(1)}_{\text{чел}} = \frac{1}{2} m_1 R^2 \omega_1 + m R^2 \omega_1 \ . \tag{158}$$

Здесь: $L^{(1)}_{\text{платф}}=J_{\text{платф}}\omega_1$ – момент импульса платформы в состоянии «До», $L^{(1)}_{\text{чел}}=J_{\text{чел}}\omega_1$ - момент импульса человека в состоянии «До», $J_{\text{платф}}=m_1R^2/2$ – момент инерции платформы в форме диска (см. табл.№1), $J_{\text{чел}}=m_2R^2$ – момент инерции человека (если его принять за материальную точку, см. табл.№1). За состояние "После" выберем состояние системы платфор-

[35] Сравните полученные выражения и численные значения для пройденного пути при решении этой задачи и задачи в примере №12. Они совпадают.

ма-человек в тот момент времени, когда человек оказался в центре платформы. В этом случае, угловая скорость вращения - ω_2,а момент инерции человека равен нулю так, как расстояние от него до оси вращения – равно нулю (человек принимается за материальную точку), поэтому его момент импульса так же равен нулю. В соответствии с чем, суммарный момент импульса системы человек-платформа в состоянии «После» совпадает с моментом импульса только платформы и равен[36]

$$L_2 = L^{(2)}{}_{\text{платф}} + L^{(2)}{}_{\text{чел}} = \frac{1}{2} m_1 R^2 \omega_2 + 0 \ . \tag{159}$$

Поскольку система платформа-человек изолирована, постольку ее суммарный момент импульса «До» равен ее суммарному моменту импульса «После»:

$$\frac{1}{2} m_1 R^2 \omega_1 + m_2 R^2 \omega_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2 \omega_2 \ . \tag{160}$$

Производя в уравнении (160) сокращение на квадрат радиуса и решая, полученное в результате этого, уравнение, найдем:

$$\omega_2 = \left(1 + \frac{2m_1}{m_2}\right)\omega_1 = \left(1 + \frac{2 \cdot 70}{100}\right) \cdot 30\pi = 72\pi \text{ рад/с}$$

Теперь ответим на второй вопрос задачи. Для этого воспользуемся законом сохранения и превращения механической энергии (63). На самом деле, с какой силой воздействовал человек на платформу? С силой трения[37], т.е. неконсервативной силой. Считая момент силы трения постоянным, найдем его величину. Для этого выберем за начальное состояние системы человек-платформа их состояние, когда человек находился на краю платформы, а за конечное – когда он оказался в центре платформы. Далее записав закон сохранения и превращения механической энергии (63):

$$E_2 - E_1 = A_{\text{неконс}}$$

и воспользовавшись соотношением (133), получим:

$$\frac{m_1 R^2 \omega_2^2}{4} - \frac{m_1 R^2 \omega_1^2}{4} - \frac{m_1 R^2 \omega_1^2}{2} = M\varphi . \tag{160}$$

Здесь: $E_2 = \dfrac{J_{\text{платф}} \omega_2^2}{2} = \dfrac{m_1 R^2 \omega_2^2}{4}$ - полная механическая энергия системы платформа-человек в конечном состоянии (момент инерции человека равен нулю, а платформы - $J_{\text{платф}} = \dfrac{1}{2} m_1 R^2$),

$E_1 = \dfrac{J_{\text{платф}} \omega_1^2}{2} + \dfrac{J_{\text{чел}} \omega_1^2}{2} = \dfrac{m_1 R^2 \omega_1^2}{4} + \dfrac{m_2 R^2 \omega_1^2}{2}$ - полная механическая энергия системы платформа-человек в начальном состоянии, складывающаяся из кинетических энергий вращения платформы и человека, соответственно, $J_{\text{чел}}=m_2R^2$ – момент инерции человека, $A_{\text{нк}} = M\varphi$ - работа среднего, а значит постоянного, момента неконсервативной силы (в нашем случае силы трения), M – средний момент силы, φ - угол поворота равный 3π.

Решая (160) относительно среднего момента силы трения и учитывая полученное ранее значение для ω_2, найдем ответ на второй вопрос задачи:

$$M = \frac{R^2}{4\varphi}\left(m_1\omega_2^2 - m_1\omega_1^2 - 2m_1\omega_1^2\right) =$$

$$= \frac{2^2}{4 \cdot 3\pi}\left[100 \cdot (72\pi)^2 - 100 \cdot (30\pi)^2 - 2 \cdot 70 \cdot (30\pi)^2\right] \approx 316512 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

---

[36] момент инерции платформы не меняется так, как она не меняет своего положения относительно оси вращения.

[37] Сила трения является внутренней силой для системы платформа-человек. Поэтому выше она не рассматривалась.

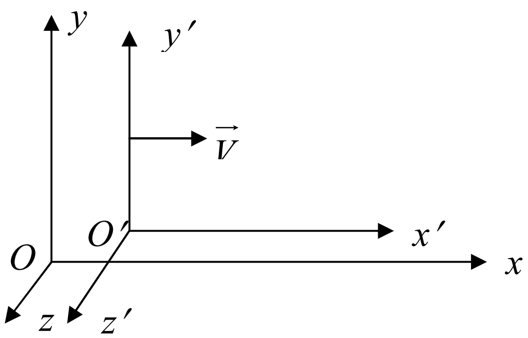


Рис. 20

3.4. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.23 Точка движется по окружности радиуса R=2 см. Зависимость пути от времени дается уравнением $S = Ct^3$, где C=0.1 м/с^3. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения точки в момент времени, когда ее линейная скорость v=0.3 м/с.

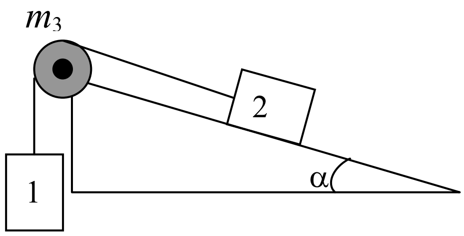


Рис.19

Задача 1.24 Блок массой m_3=0.5 кг укреплен на вершине наклонной плоскости (рис.19), образующей с горизонтом угол α=30°. Грузы 1 и 2 одинаковой массой m_1=m_2=m=1кг соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Найти ускорение движения грузов a и силы натяжения нити T_1 и T_2, если коэффициент трения груза 2 о наклонную плоскость μ=0.01. Трением в блоке пренебречь. Блок считать однородным диском.

Задача 1.25 Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью v=7.2 км/ч. На какое расстояние S может вкатиться обруч на горку за счет своей кинетической энергии? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути. Трением качения пренебречь. (Ответ: S=4.1 м)

Задача 1.26 Найти линейные скорости v движения центров шара, диска и обруча, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости у ее подножья. Высота наклонной плоскости h=0.5 м, начальная скорость всех тел равна нулю. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего без начальной скорости с этой же наклонной плоскости при отсутствии трения. (Ответ: шар – v=2.65 м/с в $\sqrt{7/5}$ раз меньше, диск – v=2.56 м/с в $\sqrt{3/2}$ раз меньше, обруч – v=2.21 м/с в $\sqrt{2}$ раз меньше)

Задача 1.27 Человек массой m= 60 кг находится на неподвижной платформе массой M=100 кг, которая может вращаться вокруг оси проходящей через ее центр. С какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиуса r=5 м вокруг оси вращения платформы? Радиус платформы R=10 м. Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой. (Ответ: ω= 0.026 рад/с)

Задача 1.28 Горизонтальная платформа в форме диска массой M=80 кг вращается вокруг оси , проходящей через ее центр, с угловой скоростью ω_1=62.8 рад/с. Радиус платформы R=1 м. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири одинаковой массы m=10 кг. Длина руки человека r=0.6 м. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться платформа, если человек опустит руки? Какую работу A при этом совершит человек? Размерами туловища человека и гирь пренебречь. (Ответ: ω_2=74.1 рад/с, A=33507 Дж)

4. Специальная теория относительности.

К задачам на специальную теорию относительности относятся задачи, в которых рассматривается движение тел со скоростями сравнимыми со скоростью света в вакууме ($c\approx$300 000км/с=$3\cdot10^8$ м/с) или для решения которых необходимо вычисление энергии покоя.

4.1. Основные понятия и соотношения.

Система отсчета – совокупность тела отсчета, системы координат, связанной с ним, и прибора для измерения времени (часы).

Инерциальная система отсчета – система отсчета, движущаяся с постоянной по величине и направлению скоростью, т.е. без ускорения.

Собственная система отсчета – инерциальная система отсчета относительно которой тело покоится.

Лабораторная система отсчета – инерциальная система отсчета относительно, которой (из которой) производится наблюдение за телом.

Очевидно, что для каждого тела существует единственная собственная система отсчета и не ограниченное множество лабораторных систем отчета (одна из которых может совпадать с собственной). В дальнейшем, будем обозначать значения параметров тела (его размеров, массы, времени и т.д.), измеренные в собственной системе отсчета, с индексом «0» (l_0, m_0, t_0 и т.д.), значения этих же параметров, но измеренные в лабораторной системе отсчета, – теме же буквами, но либо без штрихов (l, m, t и т.д.), либо со штрихами (l', m', t' или l'', m'', t'' и т.д.), в зависимости от числа рассматриваемых лабораторных систем отсчета. Соответственно будем обозначать системы координат и сами координаты.

В основе всей специальной теории относительности лежат *преобразования Лоренца*, связывающие координаты и время, измеренные в одной инерциальной системе отсчета[31] (O), с координатами и временем, измеренными в другой инерциальной системе отсчета[38] (O'), движущейся относительно первой вдоль ее оси Ox с постоянной скоростью – V (см. рис.20):

Таблица №2 «Преобразования Лоренца»

$O \to O'$	$O' \to O$
$x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$	$x = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \dfrac{t - \dfrac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$	$t = \dfrac{t' + \dfrac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$

Главными следствиями этих преобразований являются:

- Лоренцево сокращение длин, происходящее только вдоль направления движения:

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\ , \tag{161}$$

где l_0 – собственная длина (или длина покоя), т.е. измеренная в собственной системе отсчета;

- Лоренцево замедление времени:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\ , \tag{162}$$

где Δt_0 – собственный интервал времени, т.е. измеренный в собственной системе отсчета;

- Зависимость массы движущегося тела от скорости его движения:

[38] Эти системы отсчета не обязательно являются собственными. Поэтому в общем случае считаются лабораторными O и O` (см. рис. 20)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (163)$$

где m_0 – масса покоя, т.е. измеренная в собственной системе отсчета.

- Связь массы и энергии:

$$E = mc^2 \; ; \qquad (164)$$

- Сложение скоростей:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \quad , \quad v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \; ; \qquad (165)$$

- Кинетическая энергия движущегося тела:

$$K = mc^2 - m_0 c^2 \; ; \qquad (166)$$

5.2. Порядок решения задач.

1. Определите систему отсчета относительно которой заданы численные данные задачи и систему отсчета относительно которой требуется найти значения неизвестных физических величин.
2. Определите значение и направление вектора скорости движения этих систем отсчета относительно друг друга.
3. Выберете координатные оси, отвечающие этим системами отсчета, сонаправленными, соответственно. При этом «x»-овые оси этих систем отсчета следует направить вдоль вектора скорости их движения относительно друг друга.
4. Воспользуйтесь, в зависимости от условия задачи, соотношениями, приведенными в таблице №2, или формулами (161) – (166). Помня при этом, что **поперечные (вектору скорости) размеры и координаты не изменяются**, а полная энергия тела определяется, как mc^2 и включает в себя не только кинетическую энергию, но и энергию покоя m_0c^2 , связанную с наличием массы покоя.

4.3. Примеры решения задач.

Пример 1.20. Определить, с какой скоростью должен бежать человек, чтобы спрятать пяти метровый шест, который он несет горизонтально, в трех метровом сарае (см. рис.21).

Дано:
l_0=5 м
l=3 м
V=?

В данной задаче собственной (для шеста) системой отсчета является система отсчета, связанная с бегущим человеком. Относительно нее шест покоится и его длина равна собственной длине – l_0=5м.

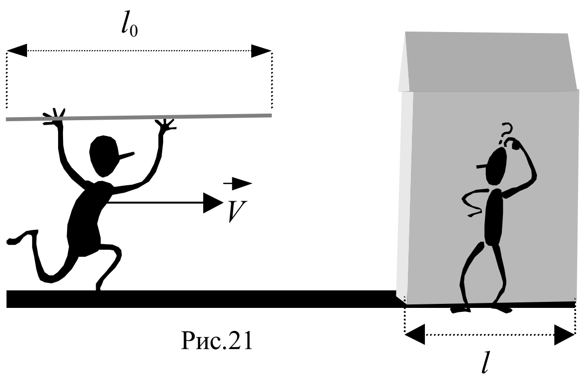


Рис.21

В качестве лабораторной системы отсчета выберем систему отсчета, связанную с сараем. Будем считать, что рядом с сараем стоит наблюдатель, который сравнивает длину сарая с длиной шеста. По условию задачи эти длины должны быть для него одинаковыми. Таким образом, длина шеста в лабораторной системе отсчета – l=3 м.

Скорость движения лабораторной системы отсчета (т.е. сарая) относительно собственной системы отсчета (т.е. бегущего человека) – V.

Записав формулу лоренцево сокращения длины (161) с учетом всего выше сказанного

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \ ,$$

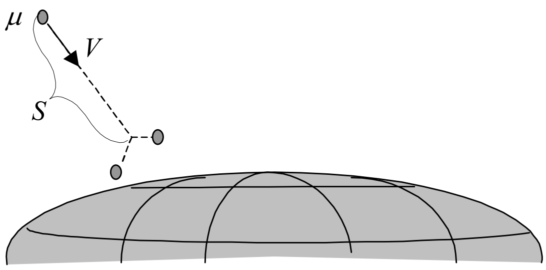
получим одно уравнение относительно одной неизвестной. Решая это уравнение, определим значение скорости бегуна относительно сарая:

$$V = c\sqrt{1-\frac{l^2}{l_0^2}} = c\sqrt{1-\frac{3^2}{5^2}} = \frac{4}{5}\cdot c = 2.4\cdot 10^8 \text{ м/с} (= 240\,000 \text{ км/ч})$$

Пример 1.21 Под воздействием космического излучения в верхних слоях атмосферы рождаются, в частности, такие элементарные частицы, как мюоны. Скорость этих частиц составляет примерно девяносто восемь процентов от скорости света в вакууме (V=0.98c). Мюоны не являются стабильными частицами. Время жизни[39] мюона в состоянии покоя - $\Delta t_0 \approx 2\cdot 10^{-6}$с. Определить на каком расстоянии от верхних слоев атмосферы еще можно обнаружить эти частицы. Гравитационным притяжением к Земле и сопротивлением воздуха пренебречь

Дано:
$\Delta t_0 \approx 2\cdot 10^{-6}$ с
V=0.98c
S=?

Рассмотрим две системы отсчета: собственную, связанную с самим мюоном, и лабораторную, связанную с Землей (в которой собственно и находится наблюдатель). В собственной системе отсчета мюон покоится и время его жизни - $\Delta t_0 \approx 2\cdot 10^{-6}$ с.



Относительно лабораторной системы отсчета мюон движется со скоростью V, поэтому время его жизни, измеренное в этой системе отсчета (см. (162)) –

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \ .$$

Таким образом, расстояние, которое он пройдет до своего распада, а он движется равномерно, поскольку притяжением к Земле и сопротивлением воздуха в данной задаче пренебрегается, может быть вычислено по формуле равномерного движения:

$$S = V\Delta t = \frac{V\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \ .$$

Подставляя в это соотношение численные данные, получим[40]

[39] По истечению этого времени мюон распадается на электрон и антинейтрино.
[40] Проверьте расчетом, что если лоренцово замедление времени не имело бы место, то мюон распался бы пролетев приблизительно 600 м. Однако экспериментально установлено, что мюоны проникают в глубь атмосферы Земли на значительно (как мы показали в пять раз) большие расстояния чем 600 м. Этот экспериментальный факт и служит одним из подтверждением верности специальной теории относительности.

$$S = \frac{0.98 \cdot c \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - \frac{(0.98 \cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{0.98 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0.98^2}} \approx 2955\,\text{м}\,(\approx 3\,\text{км})$$

Пример 1.22 Два младенца родились на Земле одновременно, но в разных ее точках: один в г.А, другой в г.В. Определить разность в возрасте этих младенцев (разницу времени их рождения) с точки зрения наблюдателя, пролетавшего мимо Земли со скоростью V=0.97c. Расстояние между городами их рождения – S_0=1200 км. Считать, что наблюдатель двигался вдоль прямой, соединяющей эти города. Кривизной поверхности Земли пренебречь.

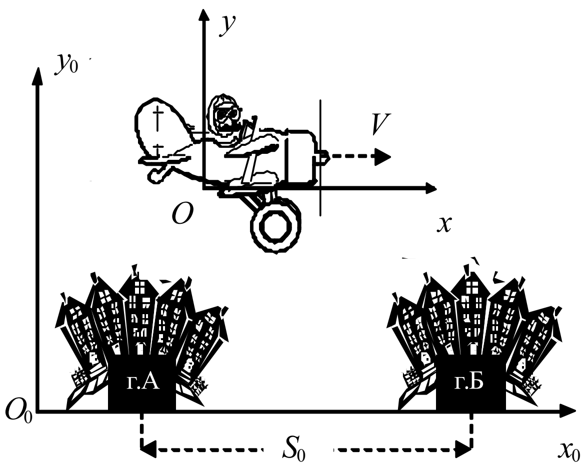


Рис. 22

Дано:
V=0.97c
$t^{(1)}{}_0 = t^{(2)}{}_0$
S_0=1200 км

$t^{(1)} - t^{(2)}$=?

Рассмотрим две системы отсчета: собственную, связанную с Землей, относительно которой младенцы покоились, и лабораторную систему отсчета, в которой находится наблюдатель (связанную с наблюдателем), движущуюся относительно собственной со скоростью V.

Запишем преобразования Лоренца, связывающие моменты времени рождения младенцев, относительно собственной и лабораторной систем отсчета (см. табл.№2):

$$t^{(1)} = \frac{t_0^{(1)} - \frac{V}{c^2} x_0^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad t^{(2)} = \frac{t_0^{(2)} - \frac{V}{c^2} x_0^{(2)}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad . \tag{167}$$

Здесь: $x^{(1)}{}_0$ и $x^{(2)}{}_0$ – координаты точек рождения младенцев в собственной системе отсчета ($x^{(2)}{}_0 - x^{(1)}{}_0 = S_0$, см.рис.22), $t^{(1)}{}_0$ и $t^{(2)}{}_0$ – моменты времени рождения младенцев в собственной системе отсчета (по условию задачи $t^{(1)}{}_0 = t^{(2)}{}_0$), $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$ – моменты времени рождения младенцев относительно лабораторной системы отсчета (с точки зрения движущегося наблюдателя). Найдем разницу моментов времени рождения младенцев с точки зрения движущегося наблюдателя. С учетом (167) имеем:

$$t^{(1)} - t^{(2)} = \frac{t_0^{(1)} - t_0^{(2)} - \frac{V}{c^2}\left(x_0^{(1)} - x_0^{(2)}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\frac{V}{c^2} S_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} .$$

При записи последнего равенства было учтено, что согласно условию задачи $x^{(2)}{}_0 - x^{(1)}{}_0 = S_0$ (см.рис.22), а $t^{(1)}{}_0 = t^{(2)}{}_0$. Подставляя численные данные, получим, что с точки зрения движущегося наблюдателя младенец в г. А родился раньше младенца в г. В на

$$t_0^{(1)} - t_0^{(2)} = \frac{\frac{0.97 \cdot c}{c^2} \cdot 1.2 \cdot 10^6}{\sqrt{1 - \frac{(0.97 \cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{\frac{0.97}{3 \cdot 10^8} \cdot 1.2 \cdot 10^6}{\sqrt{1 - (0.97)^2}} \approx 1.6 \cdot 10^{-2}\ \text{с} \ .$$

Таким образом, два события одновременные в одной системе отсчета могут быть не одновременными в другой и наоборот. Правда, при этом они должны происходить в разных точках пространства. (Из полученной в этой задаче формулы видно, **что если два события произошли одновременно в одной и той же точке пространства относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то они будут одновременными относительно любых других инерциальных систем отсчета.**)

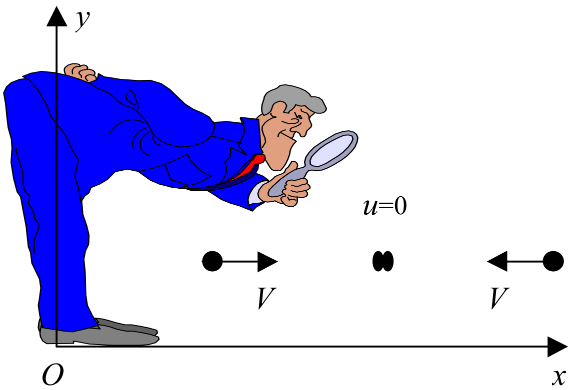
Пример 1.23 Для увеличения энергии, выделяющейся в результате соударения двух элементарных частиц, используются ускорители на встречных пучках. В этих ускорителях частицы, разогнанные до больших скоростей, направляются навстречу друг другу. В результате чего выделяется энергия большая, чем при бомбардировке ими неподвижной мишени. Найти какая энергия (ΔE) выделится при неупругом столкновении двух протонов движущихся относительно ускорителя со скоростями $V_1=V_2=V=0.9\cdot c$ (каждый) навстречу друг другу.

Дано:
$V_1=V_2=V=0.9\cdot c$
$m_0=1.8\cdot10^{-27}$кг
$\Delta E=?$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в лабораторной системы отсчета, связанной с ускорителем, протоны до соударения движутся со скоростью V (см. рис.23) и имеют массу (массу движения) определяемую соотношением (163):

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

где m_0 – масса покоя протона (см. «Дано»), т.е. измеренная в системе отсчета, относительно которой он покоится, m – масса протона, движущегося относительно лабораторной системы отсчета.



Поскольку согласно первому постулату специальной теории относительности все законы физики, в частности, закон сохранения импульса и закон сохранения и превращения механической энергии, выполняются во всех инерциальных системах отсчета, постольку запишем эти законы относительно лабораторной системы отсчета, направив ее ось Ox вдоль направления векторов скоростей движения протонов (см.рис.23):

- закон сохранения импульса относительно системы отсчета, связанной с ускорителем (вдоль оси Ox),

$$0=mV-mV=2mu, \qquad (167)$$

где u - скорость слипшихся (удар неупругий) протонов после удара,

- закон сохранения и превращения механической энергии, относительно той же системы отсчета,

$$\Delta E=E_1-E_2, \qquad (168)$$

где E_1 и E_2 – энергии начального (т.е. до соударения) и конечного (т.е. после соударения) состояний протонов относительно лабораторной системы отсчета.

Согласно (167), относительно лабораторной системы отсчета, скорость протонов после удара равна нулю – u=0 ,т.е. они покоятся и их масса равна их массе покоя ($2m_0$, см. (163) при $V=u=0$). Тогда, в соответствии с (164), полная энергия протонов в конечном состоянии равна

$$E_2=2m_0c^2, \qquad (169)$$

а энергия начального состояния (в котором они двигались со скоростями V относительно лабораторной системы отсчета), так же согласно (164) и (163), -

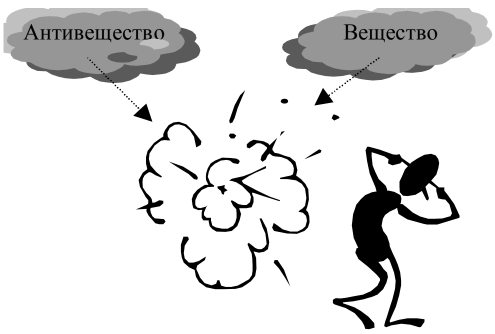
$$E_1 = 2mc^2 = 2\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \; . \qquad (170)$$

Подставляя (169) и (170) в (168) найдем ответ задачи:

$$\Delta E = 2m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-1\right) = 2\cdot 1.8\cdot 10^{-23}\cdot c^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0.9\cdot c)^2}{c^2}}}-1\right) =$$

$$= 2\cdot 1.8\cdot 10^{-23}\cdot\left(3\cdot 10^8\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0.9\cdot c)^2}{c^2}}}-1\right) \approx 4.2\cdot 10^{-6}\text{ Дж}$$

Пример 1.24 Определить энергию, которая выделится при аннигиляции одного грамма вещества и одного грамма антивещества. Скоростью сближения вещества и антивещества пренебречь.



Пояснение: В природе для каждой частицы существует своя античастица. Например, электрон и позитрон (антиэлектрон), протон и антипротон, нейтрон и антинейтрон и т.д.. Частица и соответствующая ей античастица обладают одинаковыми массами покоя. Определяющим свойством частицы и античастицы является их аннигиляция, т.е. исчезновение, при встрече (столкновении). В результате аннигиляции все свойства частицы и античастицы исчезают, в том числе и их массы покоя, а выделяется энергия в виде электромагнитного излучения (в частном случае, видимого света). Античастицы так же, как и частицы, взаимодействуют между собой и могут образовывать антиатомы, а те в свою очередь антивещество[41]. Поскольку массы частиц и им соответствующих античастиц совпадают, постольку в равных массах вещества и антивещества содержится равное количество частиц и античастиц каждого типа, соответственно. Поэтому при соединении равных масс вещества и антивещества они полностью исчезают – аннигилируют.

Дано:
$M_1=M_2=M=1\text{г}=10^{-3}\text{кг}$
$Q=?$

Согласно закону сохранения энергии, полная энергия до аннигиляции должна равняться полной энергии после аннигиляции.

Полная энергия до аннигиляции складывает ся из энергий покоя (так, как скоростью сближения можно пренебречь) вещества – Mc^2 и антивещества - Mc^2 (см. (164)), т.е. $E_{\text{до}} = 2Mc^2$. Эта энергия в результате аннигиляции полностью выделяется в виде энергии электромагнитного излучения (света, тепла, γ-излучения и радиоволн) - $E_{\text{после}} = Q$. Таким образом[42],

$$Q = 2Mc^2 = 2\cdot 10^{-3}\cdot\left(3\cdot 10^8\right)^2 = 1.8\cdot 10^{14}\text{ Дж} \; .$$

[41] В лабораторных условиях уже получены атомы антиводорода и антигелия. Возможно, что антивещество еще существует где-то во Вселенной.

[42] Для сравнения: $1.8\cdot 10^{14}$ Дж=50 000 000 кВт·час

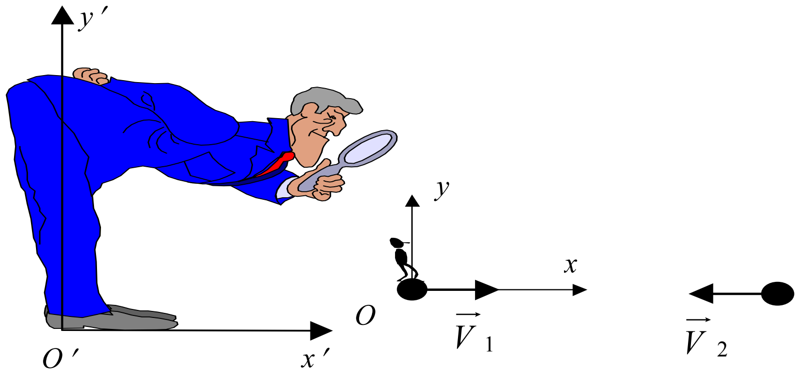


Рис.24

Пример 1.25 В ускорителе на встречных пучках два протона движутся относительно ускорителя навстречу друг другу со скоростями $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}c$. Определить скорость (V') с которой один из них движется относительно другого.

Дано:
$V_1 = V_2 = \frac{1}{2}c$
$V' = ?$

Для решения задачи выберем две системы отсчета, поместив в каждую из них по наблюдателю: «штрихованную»[43] ($x'O'y'$) систему отсчета, связанную с ускорителем, и «нештрихованную»[44] (xOy), связанную с одним из протонов. Координатные оси Ox и $O'x'$ этих систем отсчета направим вдоль вектора скорости первого протона ($\vec{V}_1$). Согласно условию задачи протоны движутся относительно «штрихованной» системы отчета со скоростями V_1 и V_2 вдоль оси $O'x'$ (см.рис.24). В «нештрихованной» системе отсчета первый протон покоится, а второй - движется с некоторой скоростью V' значение которой и требуется найти.

Согласно (165) скорость второго протона относительно первого может быть найдена, как

$$V' = \frac{v_x^{(2)} - V}{1 - \frac{v_x^{(2)} V}{c^2}}, \tag{171}$$

где - $v_x^{(2)}$ проекция вектора скорости ($\vec{V}_2$) второго протона относительно «не штрихованной» системы отсчета на ее ось Ox, равная $v_x^{(2)} = -V_2 = -\frac{1}{2}c$, поскольку ось Ox и $\vec{V}_2$ параллельны, но противоположно направлены (см.рис.24), V – скорость движения вдоль оси Ox «штрихованной» системы отсчета, совпадающая, согласно выбору последней с $V_1 = \frac{1}{2}c$ (см.рис.24). Тогда, в соответствии, со всем выше сказанным[45]:

$$V' = \frac{-\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c}{1 - \frac{\left(-\frac{1}{2}c\right)\frac{1}{2}c}{c^2}} = \frac{-c}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}c = -2.4 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Знак минус связан с тем, что за положительное направление (т.е. за направление координатной оси) выбрано направление движения первого протона, а второй протон движется ему навстречу.

[43] Она является лабораторной для протонов.

[44] Она является собственной для этого протона и лабораторной для другого протона и ускорителя.

[45] Обратите внимание, что хотя протоны движутся с одинаковыми скоростями навстречу друг другу их скорости **складываются не просто,** как V_1+V_2. В результате, чего скорость движения одного относительно другого оказывается меньше, чем сумма их скоростей, как это мы привыкли считать в нашей обыденной практике (при скоростях много меньших скорости света).

4.4. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.29 Определить с какой скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы он мог провалиться сквозь канализационную решетку (между ее прутьями). Собственная длина автомобиля – l_0=5 м, а расстояние между прутьями решетки – l=10 см. Считать, что прутья решетки расположены перпендикулярно скорости движения автомобиля. (Ответ: V=0.9998$\cdot c$)

Задача 1.30 Определить массу (движения) фотона красного света, если его энергия E= $2.55\cdot10^{-19}$ Дж. (Ответ: $m\approx2.83\cdot10^{-36}$ кг)

Задача 1.31 Оцените величину массы, которую ежегодно (1 год$\approx3.2\cdot10^{7}$ с) теряет Солнце в результате излучения (фотонов), если мощность излучения Солнца – $P=3.9\cdot10^{26}$ Вт. (Ответ: $\Delta M\approx1.39\cdot10^{17}$ кг)

Задача 1.32 Определить возраст космонавта τ', совершившего космический полет со скоростью v=0.9c, если время полета, измеренное по часам остававшимся на Земле, составило Δt=5 лет. Возраст космонавта в момент старта был τ=35 лет[46]. (Ответ: $\Delta t_0\approx$ 2.18 лет $\Rightarrow$ $\tau'=\tau+\Delta t_0\approx$ 37.18 лет)

Задача 1.33 Определить массу (m) и кинетическую энергию (K) электрона, движущегося со скоростью v=0.85c. (Ответ: $m\approx1.9\cdot m_0\approx17.3\cdot10^{-31}$ кг, $K\approx0.9\cdot m_0c^2\approx7.4\cdot10^{-14}$ Дж, $m_0\approx9.1\cdot10^{-31}$ кг – масса покоя электрона.)

Задача 1.34 Электрон, разогнанный в бетатроне до скорости v=0.98c (относительно бетатрона), неупруго сталкивается с неподвижной, относительно ускорителя, мишенью (т.е. захватывается ею). Найти какая энергия ΔE выделится в результате этого соударения? (Электрон в результате соударения не исчезает.) (Ответ: $\Delta E\approx4.03\cdot m_0c^2\approx3.30\cdot10^{-13}$ Дж , $m_0\approx9.1\cdot10^{-31}$ кг – масса покоя электрона.)

Задача 1.35 Определить с какой скоростью (v) должен двигаться наблюдатель, чтобы два события, произошедшие на расстоянии $1.2\cdot10^{9}$ км ($=x_1-x_2$) через 1 час($=t_1-t_2$) друг за другом, были бы для него одновременными событиями[47]. (Ответ: $v=0.9\cdot c$=270 000 км/с)

Задача 1.36 Рассчитать скорость движения двух фотонов относительно друг друга, если они движутся а) навстречу друг другу, б) друг за другом. (Ответ: а) $v=c\approx$300 000 км/с, б) $v=c\approx$300 000 км/с)

[46] Рассчитайте собственное время жизни фотона, т.е. измеренное по часам, движущимся вместе с фотоном. Фотон – квант света, движется со скоростью света.

[47] Выведите условие (соотношение), связывающее расстояние и интервал времени, разделяющие два события, при котором эти два события ни для какого наблюдателя (т.е. с какой бы скоростью он ни двигался) не будут одновременными.

Учебное издание

А.Г.Волков

Физика: Механика и элементы специальной теории относительности

Модуль №1

Рабочая тетрадь

Редактор Н.П.Кубышенко

Подписано в печать 13.08.2004 Формат 60x84 1/16

Бумага типографская Офсетная Усл.печ.л. 2.08

Уч.-изд.л. 3.36 Тираж 500 Цена «С»

ООО “Издательство УМЦ УПИ”, 2006

620002, г.Екатеринбург, Мира, 17