ФИЗИКА: ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

МОДУЛЬ 2

Рабочая тетрадь
для студентов, обучающихся по дистанционной технологии

Екатеринбург 2006

УДК 373:53

Составители Ф.А. Сидоренко, З.А. Истомина, Т.И. Папушина
Научный редактор проф., д-р. физ.-мат. наук А.А. Повзнер

ФИЗИКА: ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ: Рабочая тетрадь. / Ф.А. Сидоренко, З.А. Истомина, Т.И. Папушина. Екатеринбург: ООО «Изд-во УМЦ УПИ», 2006. 32 с.

Данная рабочая тетрадь по разделам «Молекулярная физика», «Термодинамика», «Явления переноса» предназначена для оказания помощи студентам, обучающимся по дистанционной технологии в изучении курса «Общая физика»; составлена в соответствии с рабочей программой курса «Общая физика» и образовательными стандартами. Изучение материала конспекта лекций следует вести параллельно с решением задач из рабочей тетради.

Библиогр.: 2 назв.

Подготовлено кафедрой физики ГОУ ВПО УГТУ-УПИ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

2. Физические основы молекулярной физики и термодинамики

2.1. Молекулярно-кинетическая теория (МКТ)

2.1.1. Основные понятия, обозначения, формулы

Модели и абстракции: идеальный газ, равновесное состояние и равновесные процессы в идеальном газе (изотермический, изохорический, изобарический и адиабатический).

Основное уравнение МКТ

$$p = \frac{2}{3} n < \varepsilon >, \quad p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 < \upsilon_{кв} >^2}{2}, \quad p = nkT,$$

где p – давление газа; n – число молекул в единице объема; $<\varepsilon>$ - средняя энергия теплового движения молекулы газа; m_0 – масса молекулы; T – абсолютная температура; k – постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$Дж/К).

$$k = \frac{R}{N_A},$$

где N_A – число Авогадро ($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$); R – универсальная газовая постоянная ($R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)).

Среднеквадратическая скорость газовых молекул

$$< \upsilon_{кв} > = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где M – масса одного моля газа.
Масса одной молекулы

$$m_0 = \frac{M}{N_A}.$$

Плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = n \cdot m_0.$$

Уравнение Клапейрона – Менделеева
(уравнение состояния разреженного газа)

$$pV = \nu RT = \frac{m}{M} RT,$$

где ν - число молей газа, m – масса газа, V – объем газа.

Закон Бойля – Мариотта (изотермический процесс, T = const)

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Закон Гей – Люссака (изобарический процесс, p = const.)

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Закон Шарля (изохорический процесс, V = const.)

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Закон Дальтона для давления смеси газов

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_N,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ – парциальные давления газов, находящихся в смеси (парциальное давление – давление газа в отдельности, если бы он при данной температуре один заполнял весь объем).

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \nu \frac{i}{2} RT,$$

где i – число степеней свободы молекул.

Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2} R.$$

Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении

$$C_P = C_V + R = \frac{i+2}{2} R.$$

Связь между молярной С и удельной $c_{уд}$ теплоемкостями

$$C = M \cdot c_{уд}.$$

Число молекул dN, относительные скорости которых лежат в интервале от U до $U + dU$, позволяет найти закон распределения молекул по скоростям (закон Максвелла)

$$dN = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-U^2} U^2 dU$$

где $U = \upsilon / \upsilon_в$ - относительная скорость, υ - данная скорость и $\upsilon_в = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/M}$ - наиболее вероятная скорость газовых молекул; dU – малый, по сравнению со скоростью U, интервал относительных скоростей.

Среднеарифметическая скорость газовых молекул

$$< \upsilon > = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\ .$$

Барометрическая формула

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g}{kT} \cdot h} = p_0 \cdot e^{-\frac{Mg}{RT} \cdot h},$$

где p – давление газа на высоте h; p_0 – давление газа на высоте h=0; g – ускорение свободного падения.

Зависимость концентрации молекул газа от высоты

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g}{kT} \cdot h} = n_0 \cdot e^{-\frac{Mg}{RT} \cdot h},$$

где n – концентрация молекул на высоте h; n_0 – концентрация молекул на высоте $h = 0$.

2.1.2. Алгоритм решения задач

1. Выделить объект – идеальный газ с определенным числом степеней свободы i и массой моля M.
2. В зависимости от химической формулы молекулы газа, используя таблицу Менделеева, определить численные значения i и M.
3. Найти недостающие термодинамические параметры, используя уравнение Клапейрона – Менделеева.
4. При наличии изопроцесса написать соответствующее ему уравнение.
5. Для нахождения таких величин, как плотность газа ρ, среднеквадратическая скорость молекул $<\upsilon_{кв}>$, наиболее вероятная скорость молекул $\upsilon_в$, среднеарифметическая скорость молекул $<\upsilon>$, использовать соответствующие формулы

6. При решении задач на закон распределения молекул по скоростям использовать упрощенную формулу.

6. Выразить значения всех физических величин в единицах системы СИ.
7. Подставить числовые значения в конечные формулы и произвести расчет.

2.1.3. Примеры решения задач

Пример 1. 10 г кислорода находятся под давлением $3{,}0 \cdot 10^5$ Па при температуре 10 °С. После расширения, вследствие нагревания при постоянном давлении, кислород занял объем 10 л.

Найти: 1) объем газа V_1 до расширения, 2) температуру газа T_2 после расширения, 3) плотность газа до расширения ρ_1.

Дано:
m = 10г = 10^{-2}кг;
$p_1 = 3{,}0 \cdot 10^{5}$ Па;
T_1 = 283 К;
$V_2 = 10^{-2}$ м^3;
$M_{O2} = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

---

1) V_1 = ? 2) T_2 = ?
3) ρ_1 = ?

Анализ
Объект – идеальный газ (кислород) с числом степеней свободы i =5, молярная масса $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. В газе происходит равновесный изобарический процесс. Начальное состояние 1 с параметрами P_1, V_1, T_1; конечное состояние 2 с параметрами p_2, V_2, T_2;
$p_1 = p_2$

Решение
1). Из уравнения Клапейрона – Менделеева выражаем объем газа V_1 в 1 состоянии:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1; \qquad V_1 = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{p_1}.$$

2). Для нахождения температуры T_2 используем закон Гей – Люссака:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \qquad T_2 = \frac{V_2 T_1}{V_1}; \qquad T_2 = \frac{p_1 V_2 \cdot M}{mR}.$$

3). Для нахождения плотности газа ρ_1 используем формулу плотности и уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{p_1 M}{RT_1}, \qquad \rho_1 = \frac{p_1 M}{RT_1}.$$

4). Расчет искомых физических величин

$$V_1 = \frac{10^{-2} \cdot 8{,}31 \cdot 283}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{5}} = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\, м^3;$$

$$T_2 = \frac{3 \cdot 10^{5} \cdot 10^{-2} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 8{,}31} = 1155K;$$

$$\rho_1 = \frac{3 \cdot 10^{5} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 283} = 4{,}1 \frac{кг}{м^3}.$$

Ответы: $V_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3, T_2 = 1155 К, ρ_1 = 4,1 кг/м^3.

Пример 2. В сосуде объемом V = 2 л находится m = 10 г углекислого газа под давлением $p = 9\cdot10^4$ Па.

Найти: 1) среднеквадратическую скорость молекул газа $<\upsilon_{кв}>$, 2) число молекул N, находящихся в сосуде, 3) плотность газа ρ.

<u>Анализ</u>

Объект – идеальный газ (углекислый газ, CO_2) с числом степеней свободы i=6, молярная масса $M = 44\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Решение

1). Для нахождения среднеквадратической скорости используем ее формулу и уравнение Клапейрона – Менделеева

$$<\upsilon_{кв}>=\sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad pV=\frac{m}{M}RT; \quad T=\frac{pVM}{mR} \qquad <\upsilon_{кв}>=\sqrt{\frac{3RpVM}{MmR}};$$

$$<\upsilon_{кв}>=\sqrt{\frac{3pV}{m}}.$$

2). Для нахождения числа молекул газа количество молей умножаем на число Авогадро

$$N=\nu N_A=\frac{m}{M}N_A; \qquad N=\frac{m}{M}N_A.$$

3). Плотность газа находим по формуле

$$\rho=\frac{m}{V}.$$

4). Расчет искомых физических величин:

$$<\upsilon_{кв}>=\sqrt{\frac{3\cdot9\cdot10^4\cdot2\cdot10^{-3}}{10^{-2}}}=233\ \frac{м}{с};$$

$$N=\frac{10^{-2}}{44\cdot10^{-3}}\cdot6{,}02\cdot10^{23}=1{,}37\cdot10^{23};$$

$$\rho=\frac{10^{-2}}{2\cdot10^{-3}}=5{,}0\ \frac{кг}{м^3}.$$

Ответы: $<\upsilon_{кв}>$ = 233 м/с, $N = 1{,}37\cdot10^{23}$, ρ = 5,0 кг/м^3.

Пример 3. В сосуде находится идеальный газ, количество вещества ν которого равно 2 моля. Определить число ΔN молекул, относительные скорости U которых меньше 0,001 наиболее вероятной скорости $V_в$.

Анализ

Объект - идеальный газ, находящийся в равновесном состоянии.

Решение

1). Для нахождения числа молекул используем формулу распределения молекул по относительным скоростям U

$$dN = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-U^2} U^2 dU$$

2). По условию задачи максимальная относительная скорость молекул U_{max}=0,001, то есть $V_{max}/V_в$=0,001. Для таких малых значений U формулу распределения молекул по относительным скоростям можно упростить. При U<<1

$e^{-U^2} \approx 1-U^2$. Пренебрегая значением U^2 по сравнению с единицей, получаем

$e^{-U^2} \approx 1$.

В результате чего функция распределения принимает вид:

$$dN = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N U^2 dU \ .$$

3). Находим число молекул ΔN, интегрируя это выражение по U в пределах от 0 до U_{max},

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{U_{\max}} U^2 dU = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \frac{U_{\max}^3}{3} \ .$$

4). Число молекул N находим по формуле

$N = \nu \cdot N_A$.

5). Получаем окончательную формулу для

$$\Delta N = \frac{4\nu N_A}{3} \frac{U_{\max}^3}{\sqrt{\pi}} \ .$$

6). Рассчитываем ΔN

$$\Delta N = \frac{4 \cdot 2 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-9}}{3\sqrt{3{,}14}} = 9{,}07 \cdot 10^{14} \text{ молекул.}$$

Ответ: $\Delta N = 9{,}07 \cdot 10^{14}$ молекул.

Пример 4. На какой высоте давление воздуха составляет 75% от давления на уровне моря? Температуру считать постоянной и равной 0 °C.

Анализ

Объект – идеальный газ (воздух) с молярной массой $M = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль. Атмосферу считаем изотермической, а ускорение свободного падения – не зависящим от высоты.

Решение

1). Используем барометрическую формулу для нахождения h

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}; \qquad \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

2). Прологарифмируем полученное равенство

$$\frac{Mgh}{RT} = \ln\frac{p_0}{p}.$$

3). Выразим h

$$h = \frac{RT\cdot\ln\frac{p_0}{p}}{Mg}; \qquad h = \frac{RT\cdot\ln\frac{1}{p/p_0}}{Mg}.$$

4). Расчет искомой величины

$$h = \frac{8{,}31\cdot273\cdot\ln\frac{1}{0{,}75}}{29\cdot10^{-3}\cdot9{,}8} = \frac{8{,}31\cdot273\cdot0{,}28}{29\cdot10^{-3}\cdot9{,}8} = 2{,}3\cdot10^{3}\ м.$$

Ответ: $h = 2{,}3\cdot10^{3}$ м.

2.1.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. 12 г газа занимают объем $V = 4\cdot10^{-3}$ м^3 при температуре $t = 7$ °C. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $\rho = 6\cdot10^{-4}$ г/см^3. До какой температуры нагрели газ?

Ответ: до температуры 1400 К.

Задача 2. Найти среднеквадратическую скорость молекул газа, плотность которого при давлении $p = 10^{5}$ Па равна $\rho = 8{,}2\cdot10^{-2}$ кг/м^3. Чему равна молярная масса этого газа, если значение плотности дано для температуры $t = 17$ °C?

Ответы: $\langle\upsilon\rangle = 1900$ м/с, $M = 0{,}002$ кг/моль.

Задача 3. Определить относительное число $\Delta N/N$ молекул идеального газа, скорости которых заключены в пределах от нуля до 0,005 наиболее вероятной скорости $V_в$.

Ответ: $\Delta N/N = 9{,}4 \cdot 10^{-8}$.

Задача 4. Считая атмосферу изотермической, а ускорение свободного падения не зависящим от высоты, вычислим давление: а) на высоте 5 км, б) на высоте 10 км, в) в шахте на глубине 2 км. Расчет произвести для T = 293 К. Давление на уровне моря принять равным p_0.

Ответы: а) $p = 0{,}56\, p_0$, б) $p = 0{,}33\, p_0$, в) $p = 1{,}26\, p_0$.

2.2. Явления переноса

2.2.1. Основные понятия, обозначения, формулы

Модели и абстракции: идеальный газ, неравновесные состояния, в которых происходит пространственный перенос энергии в виде теплоты Q, массы m и импульса P.

Средняя длина свободного пробега молекулы рассчитывается по формуле

$$< \lambda > = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n},$$

где σ – эффективный диаметр молекулы, n – концентрация молекул.

Перенос массы газа происходит в процессе диффузии. Закон Фика для диффузии

$$\Delta m = -D\frac{d\rho}{dx}S\Delta t,$$

где D – коэффициент диффузии, $d\rho/dx$ – проекция на ось x градиента плотности газа, S – площадь площадки, расположенной перпендикулярно к оси x, Δt – время диффузии.

Перенос импульса молекул происходит в процессе внутреннего трения. Закон Ньютона для внутреннего трения

$$P = -\eta\frac{d\upsilon}{dx}S\Delta t,$$

где η – коэффициент внутреннего трения, $d\upsilon/dx$ – проекция на ось x градиента скорости направленного движения молекул.

Перенос энергии молекул происходит в процессе теплопроводности. Закон Фурье для теплопроводности

$$Q = -\chi \frac{dT}{dx} S\Delta t,$$

где χ – коэффициент теплопроводности, dT/dx – проекция на ось x градиента температуры.

Коэффициенты в явлениях переноса рассчитываются по формулам:

$$D = \frac{1}{3} < \lambda >< \upsilon >;$$

$$\eta = \frac{1}{3} < \lambda >< \upsilon > \rho;$$

$$\chi = \frac{1}{3} < \lambda >< \upsilon > \rho \cdot c_{V уд}.$$

2.2.2. Алгоритм решения задач

1. В зависимости от конкретных условий задачи выписать формулы, соответствующие данному явлению переноса.
2. Среднеарифметическую скорость газовых молекул рассчитать по формуле
$$< \upsilon > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$
3. Используя основное уравнение МКТ, найти концентрацию молекул газа n.
4. Найти среднюю длину свободного пробега молекул газа $< \lambda >$.
5. Выразить искомую величину или отношение величин.
6. Подставить численные значения в единицах системы СИ и произвести расчет.

2.2.3. Примеры решения задач

Пример 5. Найти среднюю длину свободного пробега молекул углекислого газа при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °С. Эффективный диаметр молекулы $\sigma = 0{,}4$ нм.

Дано:
$p = 10^5$ Па;
$T = 273$ К;
$\sigma = 0{,}4\cdot 10^{-9}$ м;
$k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К.

$<\lambda> = ?$

<u>Анализ</u>
Объект – идеальный газ (углекислый газ CO_2) с числом степеней свободы $i = 6$ и $M = 44\cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение

1). Длина свободного пробега молекул

$$<\lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}.$$

2). Выразим концентрацию молекул из основного уравнения МКТ

$$p = nkT \qquad n = p/(kT).$$

3). Подставим полученное выражение для n в формулу для $<\lambda>$

$$<\lambda> = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}.$$

4). Расчет искомой физической величины

$$<\lambda> = \frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 273}{1{,}4\cdot 3{,}14\cdot 16\cdot 10^{-20}\cdot 10^5} = 79 \text{ нм}.$$

Ответ: $<\lambda> = 79$ нм.

Пример 6. Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул азота, коэффициент диффузии и вязкость при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $t = 17$ °С. Эффективный диаметр молекул азота $\sigma = 0{,}37$ нм.

<u>Анализ</u>
Объект – идеальный газ (азот N_2) с числом степеней свободы $i = 5$ и $M = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль. Состояние газа неравновесное.

Решение

1). Длина свободного пробега молекулы

$$<\lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}.$$

2). Основное уравнение МКТ

$$p = nkT, \qquad n = p/(kT).$$

3). Расчетная формула для $<\lambda>$

$$<\lambda>= \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}.$$

4). Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} <\lambda><\upsilon>.$$

5). $$<\upsilon>= \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

6). Расчетная формула для D

$$D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}.$$

7). Коэффициент внутреннего трения (вязкость)

$$\eta = \frac{1}{3} <\lambda><\upsilon>\rho;$$

8). $\rho = n \cdot m_0$; $\qquad m_0 = M / N_A$.

9). Расчетная формула для η

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{<\upsilon>\cancel{n}m_0}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\cancel{n}}; \qquad \eta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\frac{M}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 N_A};$$

$$\eta = \frac{2\sqrt{MRT}}{3\pi\sqrt{\pi}\sigma^2 N_A}.$$

10). Расчет искомых физических величин

$$<\lambda>= \frac{1{,}38\cdot10^{-23}\cdot290}{1{,}4\cdot3{,}14\cdot(0{,}37)^2\cdot10^{-18}\cdot10^5} = 6{,}5\cdot10^{-8}\ \text{м};$$

$$D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8\cdot8{,}31\cdot290}{3{,}14\cdot28\cdot10^{-3}}}\cdot\frac{1{,}38\cdot10^{-23}\cdot290}{1{,}4\cdot3{,}14\cdot(0{,}37)^2\cdot10^{-18}\cdot10^5} = 1{,}0\cdot10^{-5}\ \text{м/с}^2;$$

$$\eta = \frac{2\sqrt{28\cdot10^{-3}\cdot8{,}31\cdot290}}{3\cdot3{,}14\sqrt{3{,}14}\cdot(0{,}37)^2\cdot10^{-18}\cdot6{,}02\cdot10^{23}} = 1{,}2\cdot10^{-5}\ \text{кг/(мс)}.$$

Ответы: $<\lambda> = 6{,}5 \cdot 10^{-8}$ м, $D = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, $\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с).

Пример 7. Как изменятся коэффициент диффузии D и вязкость η идеального газа, если его объем изотермически увеличить в а раз.

Анализ

Объект – идеальный газ. В газе происходит равновесный изотермический процесс. Начальное состояние 1, с параметрами p_1, V_1, T_1; конечное состояние 2, с параметрами p_2, V_2, T_2; $T_1 = T_2$.

Решение

1). Длина свободного пробега молекулы

$$<\lambda_1>=\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_1}; \qquad <\lambda_2>=\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_2}.$$

2). $$<\upsilon_1>=\sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}}; \qquad <\upsilon_2>=\sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M}},$$

так как $T_1 = T_2$, то $<\upsilon_1> = <\upsilon_2>$.

3). Коэффициент диффузии

$$D_1=\frac{1}{3}<\lambda_1>\cdot<\upsilon_1>, \qquad D_2=\frac{1}{3}<\lambda_2>\cdot<\upsilon_2>,$$

$$\frac{D_2}{D_1}=\frac{<\lambda_2>}{<\lambda_1>}=\frac{n_1}{n_2}.$$

4). $n = N/V$, где N – число молекул в данной массе газа

$n_1 = N/V_1$; $\qquad n_2 = N/V_2$; $\qquad D_2/D_1 = n_1/n_2 = V_2/V_1 = a$;

$D_2/D_1 = a$.

5). $$\eta_1=\frac{1}{3}<\lambda_1><\upsilon_1>\rho_1, \qquad \eta_2=\frac{1}{3}<\lambda_2><\upsilon_2>\rho_2,$$

6). $\rho_1 = n_1 \cdot m_0$; $\qquad \rho_2 = n_2 \cdot m_0$.

7). $$\frac{\eta_2}{\eta_1}=\frac{n_1\cdot n_2\cdot m_0}{n_2\cdot n_1\cdot m_0}=1; \qquad \frac{\eta_2}{\eta_1}=1.$$

Ответы: $D_2 = a\,D_1$, $\eta_2 = \eta_1$.

Пример 8. Теплопроводность гелия в 8,7 раза больше, чем у аргона (при нормальных условиях). Найти отношение эффективных диаметров атомов аргона и гелия.

Анализ

Объект – идеальный газ, находящийся при нормальных условиях ($p = 10^5$ Па, $t = 0$ °С). Аргон с $M_2 = 40\cdot10^{-3}$ кг/моль, гелий с $M_1 = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Решение

1). Коэффициент теплопроводности

$$\chi = \frac{1}{3} < \lambda >< \upsilon > \rho \cdot C_V.$$

2). $\rho = n \cdot m_0$; $m_0 = M/N_A$;

$c_{Vуд} = C_V/M = (i \cdot R)/(2 \cdot M)$.

3). $$< \upsilon >= \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \qquad < \lambda >= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}.$$

4). $$\chi = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\frac{nm_0 iR}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n \cdot 2M} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\frac{m_0 iR}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 2M}.$$

5). $$\frac{\chi_1}{\chi_2} = \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}} \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2.$$

6). $$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi_2}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{1/2}}.$$

7). Расчет отношения эффективных диаметров

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \sqrt{8{,}7 \cdot \left(\frac{4 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3}}\right)^{1/2}} = 1{,}66.$$

Ответ: $\sigma_2/\sigma_1 = 1{,}66$.

2.2.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 5. Найти эффективный диаметр молекулы азота, если при давлением $p = 10^5$ МПа и температуре $T = 273$ К значение средней длины свободного пробега молекул равно $<\lambda> = 95$ нм.

Ответ: $\sigma = 297$ пм.

Задача 6. Как изменяется средняя длина свободного пробега молекул азота, находящегося при давлением $p = 10^5$ МПа и температуре $T = 290$ К, если объем газа увеличится в 2 раза при постоянном давлении. Найти также изменение коэффициента диффузии и вязости.

Ответы: $<\lambda_2>/<\lambda_1> = 2$; $D_2/D_1 = 2^{3/2}$; $\eta_2/\eta_1 = 2^{1/2}$.

Задача 7. В результате некоторого процесса вязкость идеального газа увеличилась в $\alpha = 2{,}0$ раза, а коэффициент диффузии – в $\beta = 4{,}0$ раза. Как и во сколько раз изменилось давление газа?

Ответы: $P_2/P_1 = \alpha^3/\beta = 2$.

Задача 8. Между двумя пластинами, расположенными на расстоянии 1мм друг от друга, находится воздух. Между пластинами поддерживается разность температур $\Delta T = 1$ К. Площадь каждой пластины $S = 100$ см^2. Какое количество теплоты передается за счет теплопроводности от одной пластины к другой за 10 мин? Считать, что воздух находится при нормальных условиях. Диаметр молекул воздуха принять равным 0,3 нм.

Ответы: $Q = 78$ Дж.

2.3. Термодинамика

2.3.1. Основные понятия, обозначения, формулы

Модели и абстракции: рассматривается термодинамическая система (ТС) – идеальный газ; равновесные процессы в ТС (изотермический, изохорический, изобарический, адиабатический); обратимые и необратимые процессы; замкнутые и незамкнутые ТС.

Основные формулы:

Первое начало термодинамики в дифференциальной форме

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

то же самое в интегральной форме

$$Q = \Delta U + A,$$

где δQ и Q – элементарное и конечное количество тепла, сообщенное ТС или отданное ею; dU и ΔU – элементарное и конечное изменение внутренней энергии ТС; δA и A – элементарная и полная работы, совершенные ТС.

Работа равновесного расширения газа при переходе из состояния 1 в состояние 2

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 pdV.$$

Изменение внутренней энергии ТС

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_2 - T_1\right),$$

где i – число степеней свободы молекулы газа.

I начало термодинамики для изопроцессов в газе.

1. Изотермический процесс: $T = \text{const.}$, $\Delta U = 0$,

$$Q = A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \nu RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \nu RT\ln\frac{V_2}{V_1},$$

где $\nu = m/M$ – количество вещества.

2. Изохорический процесс: $V = \text{const.}$, $A = 0$,

$$Q = \Delta U = \nu\frac{i}{2}R(T_2 - T_1) = \nu C_V(T_2 - T_1),$$

где $C_V = \dfrac{i}{2}R$ - молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме.

3. Изобарический процесс: p = const.

$$Q = \Delta U + A = \frac{i}{2}\nu R\Delta T + p\Delta V = \nu C_P\left(T_2 - T_1\right),$$

где $C_P = \frac{i+2}{2}R$ - молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении; $p\Delta V = \nu R\Delta T$ – из уравнения Менделеева – Клапейрона.

4. Адиабатический процесс: $Q = 0$,

$$A = -\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{i}{2}\nu R\left(T_1 - T_2\right).$$

5. Круговой процесс (цикл): $\Delta U = U_1 - U_1 = 0$,

$$Q_0 = A_0.$$

Коэффициент полезного действия теплового двигателя (КПД)

$$\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н},$$

где $Q_н$ и $Q_х$ – количества теплоты, полученные от нагревателя и отданные холодильнику.

Максимальный КПД идеального двигателя

$$\eta_{\max} = \frac{T_н - T_х}{T_х},$$

где $T_н$ и $T_х$ – температуры нагревателя и холодильника.

Приведенная теплота $\frac{\delta Q}{T}$.

Изменение энтропии при обратимом процессе в ТС

$$\Delta S_{обр} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Изменение энтропии при необратимом процессе в ТС

$$\Delta S_{необр} > \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Изменение энтропии в изолированной системе (II начало термодинамики)

$\Delta S = 0,$ S = const;

$\Delta S > 0,$ S возрастает.

2.3.2. Алгоритм решения задач

1. Выделить объект – термодинамическую систему (ТС) – идеальный газ, молярная масса его M, число степеней свободы молекулы i.
2. Установить начальное состояние ТС – 1 с параметрами p_1, V_1, T_1; конечное состояние – x с параметрами p_x, V_x, T_x; количество промежуточных состояний – y. Назвать процессы, происходящие в ТС.
3. Установить, замкнута ли ТС, т.е. Q = 0, или она обменивается с окружающими телами теплом Q или работой A (возможно, что и одновременно). Записать уравнение I начала динамики для каждого процесса.
4. Изобразить для наглядности процессы в ТС в виде графиков в координатах $P – V$.
5. Написать уравнения газовых законов, связывающих между собой состояния 1 и x через промежуточные состояния.
6. Рассчитать искомые величины (работу A, приращение внутренней энергии ΔU, участвующее в процессах тепло Q, и т.д.) (в общем виде).
7. Для кругового процесса написать формулу для расчета КПД.
8. Найти изменение энтропии ΔS для незамкнутой системы в соответствии с происходящим процессом.

   Полное изменение энтропии в конце процессов в ТС равно

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i ,$$

   где N – количество происходящих в ТС процессов.
9. Выразить значения всех величин в системе СИ, подставить числовые значения в конечные формулы, произвести расчеты и записать окончательный ответ.

2.3.3. Примеры решения задач

Пример 9. Баллон объемом V = 20л с кислородом под давлением $p_1 = 9{,}8 \cdot 10^5$ Па и температурой t_1 = 7 °С нагревают до t_2 = 27 °С. Какое количество тепла Q поглощает газ?

Дано:
V = 20л = $20 \cdot 10^{-3}$ м^3;
T_1 = 280 К;
T_2 = 300 К;
$p_1 = 9{,}8 \cdot 10^6$ Па.

Q = ?

Анализ

Термодинамическая система – идеальный газ O_2. В молекуле 2 атома, поэтому i =5. Молярная масса атома $16 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $M_{O2} = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

В ТС идет изохорический нагрев. Начальное состояние 1 с параметрами p_1, V_1, T_1; конечное состояние 2 с параметрами p_2, V_2, T_2.

При этом $V_2 = V_1 = V$.

Решение

1). I начало термодинамики

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{i}{2}\nu R \Delta T_{12} = \frac{i}{2}V_1 \Delta p\ ,$$

где сделана замена из уравнения Менделеева – Клапейрона $V\Delta p = \nu R\Delta T$. Формула после подстановки

$$Q_{12} = \frac{i}{2}V_1\left(p_2 - p_1\right) = \frac{i}{2}V_1 P_1\left(p_2 / p_1 - 1\right).$$

2). Уравнение изохорного процесса

$p_1 / p_2 = T_1 / T_2$.

3). Окончательная формула для Q_{12}

$$Q_{12} = \frac{i}{2}\, p_1 V\left(T_2 / T_1 - 1\right).$$

4). Вычисление искомой величины

$Q_{12} = (5/2) \cdot 9{,}8 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot (300/280 - 1) = 3{,}5 \cdot 10^4$ *Дж.*

Ответ: $Q_{12} = 3{,}5 \cdot 10^4$ Дж.

2-й способ решения:

1). Количество тепла, сообщенного ТС при постоянном объеме

$$Q_{12} = \nu C_V (T_2 - T_1).$$

2). Из уравнения Менделеева – Клапейрона находят ν

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{p_1 V}{RT_1}.$$

3). Окончательная формула имеет тот же вид

$$Q_{12} = \frac{i}{2} R\frac{p_1 V}{RT_1} = \frac{i}{2}\, p_1 V\left(T_2 / T_1 - 1\right).$$

Пример 10. Кислород массой m = 8 г при температуре t_1 = 27 °С занимает объем V_1 = 0,41 л. Вычислить работу газа A в следующих процессах:

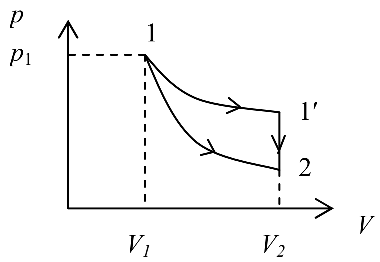
а) газ адиабатически расширяется до объема V_2 = 4,1л, б) газ изотермически расширяется до объема V_2 = 4,1л, а затем изохорически охлаждается до той же температуры, которая получилась в конце адиабатического процесса.

Дано:
m = 8г = 8 $\cdot 10^{-3}$ кг;
V_1 = 0,41л = 0,41$\cdot 10^{-3}$ м^3;
V = 4,1л = 4,1$\cdot 10^{-3}$м^3;
T_1 = 300 К.

а) A_{12} = ?
б) $A_{11'2}$ = ?

Справочные данные:
R = 8,3 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная. M_{O2} = 32$\cdot 10^{-3}$ кг/моль - молярная масса кислорода. i =5 – число степеней свободы. $\gamma = (i + 2)/i = 1,4$ – коэффициент Пуассона.

Графики процессов



1 - 2 – адиабата
1 - 1′ – изотерма
1′ - 2 – изохора

Анализ

Начальное состояние 1 с параметрами p_1 ,V_1, T_1. Конечное состояние 2 с параметрами p_2, V_2, T_2. Промежуточное состояние 1′.
В обоих случаях газ совершает при расширении положительную работу.

Решение

1). I начало термодинамики для адиабатического процесса

$$A_{12} = U_1 - U_2 = \frac{i}{2} \nu R\left(T_1 - T_2\right) = \frac{i}{2} \nu R T_1 \left(1 - T_2/T_1\right).$$

2). Уравнение Пуассона для адиабатического процесса в разных вариантах

pV^{γ} = const., $TV^{\gamma - 1}$ = const., отсюда $T_2 / T_1 = (V_1 / V_2)^{\gamma - 1}$.

3). Окончательная формула работы при адиабатическом расширении

$$A_{12} = \frac{i}{2} \nu R T_1 \left[1 \text{-} \left(V_1/V_2\right)^{\gamma - 1}\right].$$

4). Работа газа при изотермическом расширении

$$A_{11'} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \nu R T_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Сделана замена $p = \nu \mathrm{RT_1}/\mathrm{V}$ - из уравнения Менделеева – Клапейрона.

5). При изохорическом процессе работа не совершается $\mathbf{A_{1'2}} = 0$.

6). $A_{11'2} = A_{11'}$

7). Числовые значения

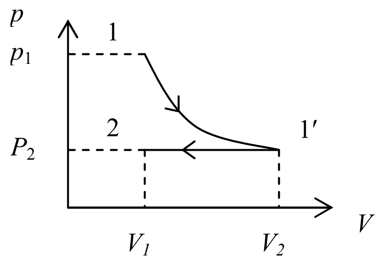
$$A_{12} = \frac{5}{2} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 300 \cdot \left[1 - (0{,}41/4{,}1)^{1{,}4-1}\right] = 930 \text{ Дж},$$

$$A_{11'2} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 300 \cdot \ln(0{,}41/4{,}1) = 1435 \text{ Дж}.$$

Ответы: $A_{12} = 930$ Дж, $A_{11'2} = 1435$ Дж.

Пример 11. Два моля ($\nu = 2{,}0$ моль) идеального двухатомного газа при температуре $T_1 = 600$К изотермически расширяется до объема $V_2 = \gamma V_1$. Затем газ изобарически сжимается до начального объема. Найти: а) температуру T_2 в конце изобарического сжатия, б) приращение ΔU_{12} внутренней энергии, в) совершенную газом работу A_{12}, г) количество полученного тепла Q.

Графики процессов



1 - 1′ – изотерма
1′ - 2 – изохора

Анализ

Начальное состояние 1 - параметры p_1, V_1, T_1. Промежуточное состояние 1′ - параметры p', V', T'. Конечное состояние 2 - параметры p_2, V_2, T_2.

При изотермическом расширении газ совершает положительную работу $A_{11'} > 0$, т.к. $V_2 > V_1$. При изобарическом сжатии газ получает энергию в форме механической работы, а отдает в форме тепла. Поэтому работа газа отрицательна $A_{1'2} < 0$, т.к. $V_1 < V'$.

Полная работа, совершенная газом при переходе 1-2, равна алгебраической сумме работ $A_{12} = A_{11'} + A_{1'2}$.

Решение

1). Уравнения изотермического и изобарического процессов

$$p_1 V_1 = p' V' \qquad \Rightarrow \qquad V'/V_1 = p_1/p',$$

$$V'/T' = V_2/T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = T'(V_2/V').$$

2). По условию

$$T' = T_1, \quad V' = V_2, \quad V'/V_1 = \gamma, \quad \text{отсюда} \quad T_2 = T_1/\gamma.$$

3). Приращение внутренней энергии

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\nu R T_1(1/\gamma - 1).$$

4). Работа при изотермическом расширении

$$A_{11'} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = \nu R T_1 \ln\gamma.$$

5). Работа при изотермическом сжатии

$$A_{1'2} = p'\int_{V_1}^{V_2} dV = p'(V_2 - V') = \nu R(T_2 - T_1) = \nu R T_1(1/\gamma\text{-}1).$$

6). Полная работа

$$A_{12} = A_{11'} + A_{1'2} = \nu R T_1(\ln\gamma + 1/\gamma\text{-}1).$$

7). Количество полученного тепла

$$Q_{12} = \Delta U_{11'} + A_{12} = \nu R T_1\left[(i/2+1)\cdot(1/\gamma - 1) + \ln\gamma\right].$$

8). Числовые значения

а) $T_2 = 600/2 = 300$ К;

б) $\Delta U_{12} = (5/2) \cdot 2 \cdot 8{,}3 \cdot 600 \cdot (1/2 - 1) = -\ 12{,}0$ кДж;

в) $A_{12} = 2{,}0 \cdot 8{,}3 \cdot 600 \cdot (\ln 2 + 1/2 - 1) = 1{,}9$ кДж;

г) $Q_{12} = 2 \cdot 8{,}3 \cdot 600 \cdot [(5/2) + 1) \cdot (1/2 - 1)] = -\ 10{,}1$ кДж.

$\Delta U_{12} < 0$ – внутренняя энергия газа уменьшается.

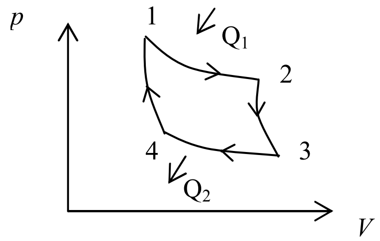
$A_{12} > 0$ – газ отдал часть своей энергии в виде работы окружающим телам.

$Q_{12} < 0$ – газ отдал окружающим телам часть тепла.

Ответы: $T_2 = 300$ К; $\Delta U_{12} = -12{,}0$ кДж; $A_{12} = 1{,}9$ кДж; $Q_{12} = -10{,}1$ кДж.

Пример 12. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого $\eta = 0{,}4$. Работа изотермического расширения $A_{12} = 400$ Дж. Найти работу изотермического сжатия A_{34}.

График цикла Карно



1 - 2 и 3 – 4 – изотермы
2 – 3 и 4 – 1 – адиабаты

<u>Анализ</u>
Цикл Карно – круговой процесс в ТС, состоящий из 2 изотерм и 2 адиабат. Газ получает тепло Q_1 при изотермическом расширении и отдает тепло Q_2 при изотермическом сжатии. Таким образом, $A_{12} > 0$, $A_{34} < 0$. Адиабатическое расширение и сжатие происходит без теплообмена с окружающей средой.

Решение

1). КПД цикла

$$\eta = \frac{A_0}{Q_н} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

2). Работа цикла

$$A_0 = A_{12} + (- A_{34}) = A_{12} - A_{34}.$$

3). I начало для изотермических процессов

$$Q_1 = A_{12}, \quad Q_2 = A_{34}.$$

4). После подстановки в формулу КПД

$$\eta = \frac{A_{12} - A_{34}}{A_{12}}, \qquad A_{12} - A_{34} = \eta \cdot A_{12}.$$

5). Работа изотермического сжатия

$$A_{34} = (\eta - 1)\, A_{12}.$$

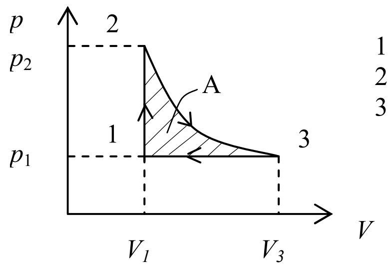
Числовое значение

$A_{34} = (0{,}4 - 1) \cdot 400 = - 240$ Дж.

Работа при сжатии отрицательна.

Ответ: A_{34} = - 240 Дж.

Пример 13. Идеальный двухатомный газ в количестве ν = 3,0 моль занимает объем V_1 = 5 л под давлением p_1 = 1,0 МПа. Газ сначала изохорно нагрели до T_2 = 500 К, потом изотермически расширили до начального давления. Затем изобарным сжатием газ вернули в первоначальное состояние. Постройте график цикла и определите термический КПД цикла η.



1 - 2 – изохора
2 - 3 – изотерма
3 - 1 – изобара

Анализ

Начальное состояние 1 - параметры p_1, V_1, T_1. Промежуточные состояния 2 - параметры p_2, V_2, T_2 и 3 - параметры p_3, V_3, T_3. Конечное состояние 1.

Цикл совершается по часовой стрелке, поэтому работа цикла положительна $A_0 > 0$. На графике работа цикла A численно равна площади заштрихованной фигуры.

Газ получает тепло Q_1 на участках 1-2 и 2-3, а отдает тепло Q_2 на участке 3-1.

Решение

1). КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

2). Полученное газом тепло

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23}.$$

3). Отданное газом тепло

$$Q_2 = Q_{31}.$$

4). Изохорный нагрев: V_1 = const, $A_{12} = 0$.

$p_1 V_1 = \nu R T_1$ - уравнение Менделеева - Клапейрона

5). I начало для изохорного процесса

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\nu R\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right).$$

6). I начало для изотермического расширения

$$Q_{23} = A_{23} = \nu R T_2 \ln\frac{V_3}{V_2} = \nu R T_2 \ln\frac{V_3}{V_1},$$

$$T_2 = T_3.$$

7). Количество тепла при изобарном сжатии

$$Q_{31} = \nu C_P\left(T_1 - T_3\right) = \frac{i+2}{2}\nu R\left(\frac{p_1 V_1}{R\nu} - T_2\right) = Q_2 .$$

8). $$Q_1 = \frac{i}{2}\nu R\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{R\nu}\right) + \nu R T_2 \ln\frac{\nu R T_2}{P_1 V_1} .$$

9). Числовые значения

$$Q_1 = \frac{5}{2} 3\cdot 8{,}3\cdot\left(500 - \frac{10^6\cdot 5\cdot 10^{-3}}{3\cdot 8{,}3}\right) + 3\cdot 8{,}3\cdot 500\ln\frac{3\cdot 8{,}3\cdot 500}{10^6\cdot 5\cdot 10^{-3}} = 2{,}9\cdot 10^4 \text{ Дж};$$

$$Q_1 = \frac{5+2}{2} 3\cdot 8{,}3\cdot\left(\frac{10^6\cdot 5\cdot 10^{-3}}{3\cdot 8{,}3} - 500\right) = -2{,}5\cdot 10^4 \text{ Дж};$$

$$\eta = \frac{2{,}9 - 2{,}5}{2{,}9} = 0{,}14.$$

Ответ: $\eta_{,\%}$ = 14%.

Пример 14. Водород массой m = 6 г изобарически расширяется от V_1 до $V_2 = 2\cdot V_1$.
Найти изменение энтропии ΔS при расширении.

Решение

1). Система незамкнута

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} .$$

2). Начало термодинамики для изобарического процесса

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{i}{2}\nu R dT + p dV = \frac{i+2}{2}\nu R dT.$$

3). Изменение энтропии

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \nu R\frac{i+2}{2}\frac{dT}{T} = \frac{i+2}{2}\nu R\ln\frac{T_2}{T_1} .$$

4). Отношение T_2/T_1 заменяем на V_2/V_1 из уравнения изобарического процесса

$$\Delta S = \frac{i+2}{2}\nu R\ln\frac{V_2}{V_1}, \qquad \nu = \frac{m}{M} .$$

5). Числовое значение

$$\Delta S = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}3 \cdot \ln 2 = 61 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S = 61$ Дж/К.

Пример 15. Азот массой $m = 28$ г адиабатически расширили в $n = 2$ раза, а затем изобарно сжали до первоначального объема.

Найти изменение энтропии ΔS в ходе указанных процессов.

Решение

1). Суммарное изменение энтропии

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} = \Delta S_{23}.$$

2). Изменение энтропии для адиабатического процесса $\Delta S_{12} = 0$, т. к. $\delta Q = 0$.

3). Элементарное количество тепла при изобарическом сжатии

$$\delta Q = \nu\, C_P\, dT.$$

4). Изменение энтропии для него

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \nu C_P \frac{dT}{T} = \nu C_P \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = \nu C_P \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

5). Заменим отношение T_3/T_2 на $V_3/V_2 = V_1/V_2 = 1/n$, а также $C_P = (i + 2) \cdot R/2$, $\nu = m / M$.

6). $$\Delta S_{23} = \frac{m}{M} \frac{i+2}{2} R \ln \frac{1}{n}.$$

7). Числовое значение

$$\Delta S = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5+2}{2} \cdot 8{,}3 \cdot \ln \frac{1}{2} = -20{,}2 \text{ Дж/К}.$$

Энтропия ТС уменьшилась, т.к. при изобарическом сжатии газ отдал тепло окружающим телам. При этом состояние ТС становится менее вероятным, а степень беспорядка в ней уменьшается (согласно II началу).

Ответ: $\Delta S = - 20{,}2$ Дж/К.

Пример 16. Найти изменение энтропии ΔS при превращении льда массой $m = 10$ г, взятого при температуре $t_1 = 0$ °C, в пар при температуре $t_2 = 100$ °C. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Решение

1). Общее изменение энтропии

$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3.$

2). Изменение энтропии при плавлении льда. Температура T_1 = const

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_1}\int_1^1 \delta Q = \frac{\Delta Q_{12}}{T_1} = \frac{\lambda m}{T_1}.$$

3). Изменение энтропии при нагреве воды, полученной изо льда

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} mc\frac{dT}{T} = mc \cdot \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

4). Изменение энтропии при превращении воды в пар. T_2 = const

$$\Delta S_3 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_2}\int_1^2 \delta Q = \frac{\Delta Q_{12}}{T_2} = \frac{r \cdot m}{T_2}.$$

5). $$\Delta S = m\left(\frac{\lambda}{T_1} + c\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{r}{T_2}\right).$$

6). Числовое значение

$$\Delta S = 10^{-2}\left(\frac{3{,}3\cdot 10^5}{273} + 4{,}2\cdot 10^3\ \ln\frac{373}{273} + \frac{2{,}3\cdot 10^5}{373}\right) = 31 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: ΔS = 31 Дж/К.

Пример 17. Горячая вода при температуре T_1 смешивается с таким же количеством холодной воды при температуре T_2, после чего их температура становится одинаковой и равной $T_{см}$.

Показать, что после смешения энтропия системы возрастает, т.е. $\Delta S > 0$.

Решение

1). Две части замкнутой ТС обмениваются между собой теплом

$\delta Q = m \cdot c \cdot dT.$

2). Суммарное изменение энтропии

$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2.$

3). Температура смеси

$T_{см} = (T_1 + T_2)/2.$

4). Изменение энтропии при охлаждении горячей воды

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_{см}} mc\frac{dT}{T} = mc \cdot \ln\frac{T_{см}}{T_1}.$$

5). Изменение энтропии при нагреве холодной воды

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_2}^{T_{см}} mc\frac{dT}{T} = mc\cdot\ln\frac{T_{см}}{T_2}.$$

6). Полное изменение энтропии

$$\Delta S = mc\left(\ln\frac{T_{см}}{T_1} + \ln\frac{T_{см}}{T_2}\right) = mc\ln\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2},$$

7). $\Delta S > 0$, если $\ln\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} > 0,$

а это возможно, если выражение $\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} > 1.$

8). Докажем неравенство

$$\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} - 1 > 0;$$

$$\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} - 1 = \frac{(T_1-T_2)^2}{4T_1T_2} > 0.$$

Это всегда справедливо. Значит, $\Delta S > 0$, т.е. энтропия возрастает. Значит, в замкнутой ТС идет необратимый процесс.

2.3.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 9. Один моль одноатомного идеального газа, находящегося при давлении $p_1 = 1{,}0\cdot10^4$ Па, адиабатически расширяется из состояния 1 в состояние 2, совершая работу A = 10 кДж. При этом средняя кинетическая энергия $<w_к>$ молекулы изменилась в n = 2 раза. Затем газ изотермически переходит в состояние 3, причем $p_3 = p_1$. Найти температуру T_3 и объем V_3 конечного состояния.

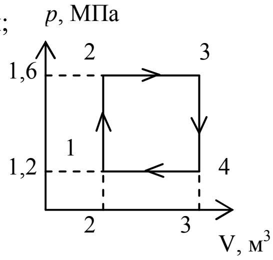
Ответы: T_3 = 1250 К, V_3 = 0,66 м^3.

Задача 10. Азот массой m = 500 г под давлением p_1 = 1,0 МПа при температуре t_1 = 127 °С изотермически расширился, в результате чего давление газа уменьшилось в n = 3 раза. Потом газ адиабатически сжали до начального давления, а затем изобарно сжали до начального объема. Построить графики процессов и найти работу A, совершенную газом за цикл.

Ответ: A = - 11,5 кДж.

Задача 11. Один киломоль ($\nu = 1{,}0 \cdot 10^3$ моль) двухатомного газа совершает замкнутый цикл. Найти:

1). Тепло Q_1, полученное от нагревателя;
2). Тепло Q_2, отданное холодильнику;
3). Работу A цикла;
4). КПД η цикла.



Ответ: Q_1 = 7,6 МДж, Q_2 = 7,2 МДж, A = 0,4 МДж, η = 5,3%.

Задача 12. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя T_1 = 500 К, холодильника T_2 = 300 К. Работа изотермического расширения A_{12} = 2 кДж. Найти: 1) КПД цикла; 2) количество тепла Q_2, отданное газом холодильнику.

Ответы: η = 40%, Q_2 = 1,2 кДж.

Задача 13. Азот массой m = 5 г изобарически расширился от объема V_1 = 2 л до объема V_2 = 5 л. Найти изменение энтропии ΔS при этом процессе.

Ответ: ΔS = 2,9 Дж/К.

Задача 14. Найти изменение энтропии ΔS при нагреве кислорода массой m = 8 г от объема V_1 = 10 л при температуре t_1 = 80°C к объему V_2 = 10 л при температуре t_2 = 300°C.

Ответ: ΔS = 5,4 Дж/К.

Задача 15. Идеальный газ в количестве ν = 2 моль сначала изобарно нагрели так, что его объем увеличился в n_1 = 2 раза, а затем изохорно охладили, после чего его давление уменьшилось в n_2 = 2 раза. Найти полное изменение ΔS энтропии системы.

Ответ: ΔS = 11,5 Дж/К.

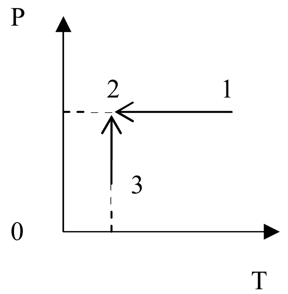
Задача 12. В одном сосуде объемом V_1 = 1,6 л находится азот массой m_1 = 14 г. В другом сосуде объемом V_2 = 3,4 л находится кислород массой m_2 = 16 г. Температуры газов одинаковы. Сосуды соединили трубкой, газы смешались. Найти изменение энтропии ΔS в ходе процесса.

Ответ: ΔS = 5,9 Дж/К.

2.4. Контрольные задания. Молекулярная физика и термодинамика

Вариант 1

1.1. На рисунке изображены два процесса 1→ 2 и 3→ 2 для одного и того же количества идеального газа. Проанализируйте, как изменяется объем этого газа при рассматриваемых процессах и укажите номер правильного соотношения.



1 $V_1 < V_2$	2 $V_2 > V_3$
4 $V_1 = V_2$	8 $V_1 > V_2$

1.2. Давление воздуха внетри плотно закупоренной бутылки при температуре 7 °С было 100 кПа. При нагревании бутылки пробка вылетела. До какой температуры нагрели бутылку, если известно, что пробка вылетела при давлении воздуха в бутылке 130 кПа ?

1.3. Перечислите номера утверждений, касающихся функции распределения Максвелла *f(v)*, на которые Вы ответите «да».

1 Функция распределения Максвелла зависит от температуры;

2 Функция *f(v)*равна нулю при V = 0 и V = ∞$

4 Каждому значению функции *f(v)*, кроме максимального, соответствуют два значения скорости молекул;

8 Производная $\partial f(v)/ \partial v$ при любых значениях скорости молекул не равна нулю.

1.4. Один моль гелия и один моль азота, находящиеся в закрытом сосуде, нагрели от температуры T_1 до температуры T_2 .

Верно ли, что …….

1 …. изменение энтропий этих газов не зависит от объема сосудов ?

2 …. изменение энтропий этих газов не зависит от скорости нагрева?

4 …. $\Delta S_{N_2} = \Delta S_{He}$?

8 ….$\Delta S_{N_2} > \Delta S_{He}$?

1.5. 10 г кислорода находятся при давлении 300 кПа и температуре 10 °С. После нагревания при постоянном давлении газ занял объем 10 л. Найти количество теплоты Q, полученное газом, приращение ΔU внутренней энергии газа и работу A, совершенную газом при расширении.

Вариант 2

2.1. Кислород и гелий находятся в сосуде и разделены перегородкой. Температуры газов разные, а давления одинаковые. Будут ли одновременно иметь место после удаления перегородки …..

1 …. внутреннее трение и теплопроводность ?

2 …. диффузия и внутреннее трение?

4 …. теплопроводность и диффузия ?

8 …. перенос импульса направленного движения молекул и их кинетической энергии?

2.2. В баллоне содержится газ при температуре 100 °С. До какой температуры нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в два раза ?

2.3. Перечислите номера правильных утверждений. Как изменится функция распределения Максвелла $f(v)$ при понижении температуры системы ?

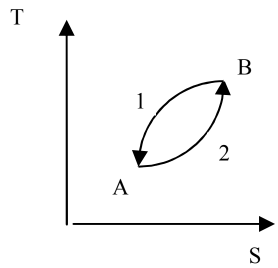
1 Уменьшатся все характеристические скорости : наиболее вероятная, средняя арифметическая, средняя квадратическая.

2 Уменьшится максимальное значение $f(v)$.

4 Увеличится максимальное значение $f(v)$.

8 Наиболее вероятная скорость не изменится.

2.4. Идеальный газ совершает обратимые процессы. Сравните:



а) количества теплоты Q_1 и Q_2, полученные газом;

б) работы A_1 и A_2, совершенные газом.

Укажите номера правильных ответов на оба вопроса.

1	$Q_1 = Q_2$, $A_1 > A_2$,	6	$Q_1 = Q_2$, $A_1 > A_2$,
2	$Q_1 = Q_2$, $A_1 < A_2$,	7	$Q_1 = Q_2$, $A_1 > A_2$,
3	$Q_1 = Q_2$, $A_1 = A_2$,	8	$Q_1 = Q_2$, $A_1 > A_2$,
4	$Q_1 < Q_2$, $A_1 > A_2$,	9	$Q_1 = Q_2$, $A_1 > A_2$.
5	$Q_1 < Q_2$, $A_1 < A_2$,		

2.5. Найти приращение энтропии ΔS при переходе 8 г кислорода от объема 10 л при температуре 80 °C к объему 40 л при температуре 300 °C.

Вариант 3

3.1. Зависит ли коэффициент диффузии идеального газа от ….

1	…. градиента концентраций компонентов смеси ?
2	….плотности газа, при давлениях порядка атмосферного ?
4	….температуры газа ?
8	…. Размеров молекул ?

Укажите номера вопросов, на которые Вы ответили «да, зависит».

3.2. При нагревании некоторой массы газа на $\Delta T = 1$ К при постоянном давлении объем этой массы газа увеличился на 1/350 часть первоначального объема. Найти начальную температуру газа.

3.3. Перечислите номера правильных утверждений о наиболее вероятной скорости частиц системы, подчиняющейся распределению Максвелла.

1	Наиболее вероятная скорость зависит от температуры и молярной массы идеального газа;
2	Наиболее вероятную скорость молекул можно найти, приравняв нулю производную функции распределения Максвелла по скоростям $\partial f(v)/\partial v = 0$;.
4	Чем больше молярная масса системы, тем меньше при данной температуре значение наиболее вероятной скорости;
8	Наиболее вероятная скорость возрастает с увеличением температуры.

3.4. Идеальный газ сначала расширялся адиабатически, затем был сжат изотермически, при этом работа расширения и сжатия газа одинакова по модулю. На какие вопросы Вы ответите «да» . Укажите их номера.

1	Верно ли, что конечный объем газа меньше начального ?
2	Верно ли, что температура газа понизилась ?
4	Верно ли, что при изотермическом сжатии газ отдавал тепло окружающим телам ?
8	Верно ли, что количество тепла, отданное газом, и приращение его внутренней энергии одинаковы ?

3.5. Найти приращение энтропии ΔS при переходе 6 г водорода от объема 20 л под давлением 150 кПа к объему 60 л под давлением 100 кПа.

Вариант 4

4.1. Водород и гелий находятся в сосуде и разделены перегородкой. Их температура и давление одинаковы. Какие из указанных ниже физических характеристик системы будут выравниваться в каждой ее точке после удаления перегородки ? Укажите их номера.

1 Давление на стенки сосуда.

2 Парциальное давление газов

4 Концентрация молекул водорода.

8 Скорость хаотического движения молекул водорода.

4.2. Определить сколько молекул содержится в 1мм^3 воды и какова масса молекул воды.

4.3. Перечислите номера правильных утверждений о средней квадратичной скорости частиц системы, подчиняющей ся распределению Максвелла.

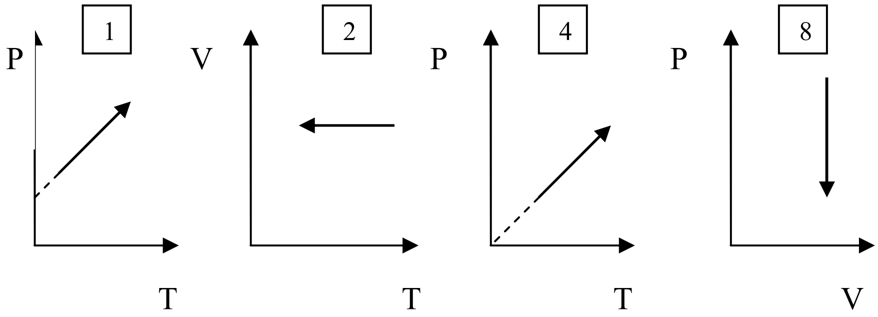
1 При одинаковой температуре средние квадратичные скорости молекул различных идеальных газов одинаковы.

2 Средняя квадратичная скорость молекул аза при любой температуре меньше наиболее вероятной скорости.

4 Чем больше масса молекул газа, тем меньше средняя квадратичная скорость.

8 При возрастании температуры системы в четыре раза средняя квадратичная скорость молекул увеличивается в два раза.

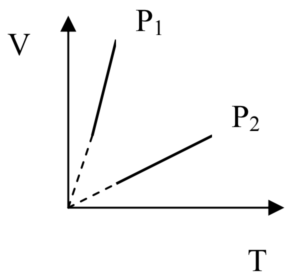
4.4. Какой из графиков характеризует процесс равновесного изохорического нагревания идеального газа. Укажите его номер.



4.5. Водород массой 6,6 г расширяется изобарически от объема V1 до объема V2 = 2 V1. Найти приращение энтропии ΔS при этом расширен.

Вариант 5

5.1. На рисунке представлены изобарические процессы для одной и той же массы идеального газа. Укажите номер правильного соотношения между давлениями P_1 и P_2. Поясните свой ответ.



1	$P_1 = P_2$,
2	$P_1 < P_2$,
4	$P_1 > P_2$,

5.2. Во сколько раз плотность воздуха, заполняющего помещение зимой (t_1= 7 °C), больше его плотности летом (t_2= 37 °C). Давление воздуха считать постоянным.

5.3. Верно ли, что ….

1	…. функция распределения Максвелла *f(v)* зависит от массы молекул газа?
2	…. функция распределения Максвелла *f(v)* зависит от температуры ?
4	…. *f(v)* является величиной размерной ?
8	…. *f(v)* носит экстремальный характер ?

Перечислите номера вопросов, на которые Вы ответили «да, верно».

5.4. Изотермическое расширение одного моля азота проведено до удвоения его объема. Точно такой же процесс при той же температуре осуществлен для одного моля гелия.

Верно ли, что

1	…. соотношение между ΔS_{N_2} и ΔS_{He} зависит от скорости процессов расширения ?
2	…. соотношение между ΔS_{N_2} и ΔS_{He} зависит от температуры ?

$\boxed{4}$ …. $\Delta S_{N_2} > \Delta S_{He}$?

$\boxed{8}$ ….$\Delta S_{N_2} < \Delta S_{He}$?

На какие вопросы Вы ответили «нет»? Укажите их номера.

5.5. Количество ν = 2 кмоль углекислого газа нагревается при постоянном давлении на 50 К. Найти приращение внутренней энергии газа, работу расширеня газа и количество теплоты, сообщенное газу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова В.И. Курс физики. М.: Высшая школа, 1994. 542 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. М.: Наука, 1979. 416 с.

ФИЗИКА: ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Рабочая тетрадь

Составители: *Сидоренко Феликс Аронович*
Истомина Зоя Анатольевна
Папушина Татьяна Ивановна

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Подписано в печать 22.07.2006			Формат 60x84 1/16
Бумага типографская		Офсетная печать	Усл. печ. л. 3,41
Уч.-изд. л. 2,10	Тираж	Заказ	Цена «С»

ООО «Издательство УМЦ УПИ»
620002, Екатеринбург, Мира, 17