Министерство образования Российской Федерации
Уральский государственный технический университет

Физика: Электростатика. Постоянный ток

Модуль №3
Рабочая тетрадь

Екатеринбург 2006

УДК 373:53

Составитель: Н.А. Звездина

Научный редактор: проф., д-р физ.– мат. наук А..А. Повзнер

ФИЗИКА: ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ПОСТОЯННЫЙ ТОК: Модуль №3: Рабочая тетрадь
Учебное пособие для студентов / Н.А. Звездина. Екатеринбург:

ООО "Изд-во УМЦ УПИ", 2006, 45 с.

Данное учебное пособие представляет собой сборник задач по разделам «Электростатика» и «Постоянный ток» курса общей физики, читаемого студентам УГТУ-УПИ. В работе описаны основные физические законы указанных разделов, а также рассмотрены наиболее важные конкретные примеры их применения.

Материал учебного пособия разделен на несколько частей, для каждой из которых приведены основные законы и формулы, порядок решения и особенности решения задач этой темы. Приведены решения типичных задач каждой темы с подробными пояснениями. Даны задачи для самостоятельной работы.

Подробный анализ, сопровождающий примеры решения задач и приведение алгоритмов для решения задач различных типов позволяют использовать это конспект лекций и рабочую тетрадь для самостоятельной работы по освоению материала этих двух разделов курса общей физики студентами как дневной, так и заочной форм обучения.

Учебное пособие составлено в соответствии с программой курса "Общая физика" и отвечает всем требованиям, принятым на кафедре физики УГТУ–УПИ и предназначены для студентов УГТУ–УПИ всех специальностей и всех форм обучения.

Подготовлено кафедрой физики

СОДЕРЖАНИЕ

3.1. Задачи на принцип суперпозиции электрических полей

Основной задачей электростатики является определение характеристик электростатического поля - напряженности $\vec{E}$ и потенциала φ. Зная эти величины, можно решать задачи о поведении заряда в электростатическом поле.

Имеются два метода решения этих задач: принцип суперпозиции полей и теорема Гаусса.

3.1.1. Основные понятия и определения

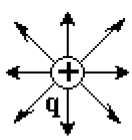
Согласно принципу суперпозиции напряженность электростатического поля в какой-либо точке пространства, создаваемая системой зарядов, равна геометрической сумме векторов напряжённостей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности в этой же точке.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots$$

Напряженности полей простейших распределений зарядов нам известны. Используя формулы для вычисления напряжённостей полей некоторых простейших распределений зарядов, методом суперпозиции можно рассчитать напряженность поля, созданного сложным распределением зарядов. Для наглядного представления о распределении поля вокруг зарядов вводят понятие силовых линий (или линий напряженности) электростатического поля. По определению, силовая линия - это направленная линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором $\vec{E}$.

Приведем формулы для вычисления напряженности поля и картину силовых линий для некоторых распределений зарядов.

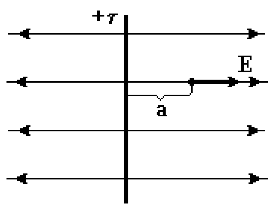
1. Поле точечного заряда



$$E = k\frac{q}{\varepsilon r^2},$$

где r - расстояние от заряда q, до той точки, в которой считаем поле, $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

2. Поле бесконечной заряженной нити

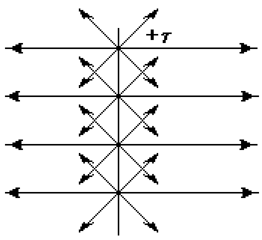


$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\tau}{\varepsilon a},$$

где $\tau = \dfrac{dq}{dt}$ - линейная плотность зарядов,

a - кратчайшее расстояние от нити до точки, в которой считаем поле.

Силовые линии представляют собой радиальные линии, расположенные в плоскости, перпендикулярной к нити и при её положительном заряде они начинаются на нити и уходят в бесконечность.



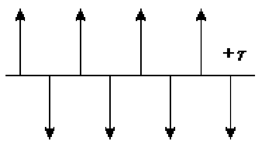
3. Поле бесконечно протяженной плотности

$$E = \frac{\tau}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где $\tau = \dfrac{dq}{dS}$ - поверхностная плотность зарядов;

ε - диэлектрическая проницаемость среды вокруг плоскости,

ε_0 - $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ ф/м - диэлектрическая проницаемость вакуума.



Силовые линии поля плоскости расположены перпендикулярно плоскости в каждой точке, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором напряженности . Поле бесконечной заряженной плоскости является однородным, т.е. не зависит от расстояния до плоскости.

Если вспомнить, что по определению напряженность электростатического поля - это сила, с которой поле действует на пробный заряд (единичный, положительный, точечный), то можно представить себе, как идут силовые линии в простейших случаях, что и приведено на рисунках.

3.1.2. Порядок решения задач на принцип суперпозиции

1. Сделать рисунок:
- выбрать систему координат, учитывая симметрию задачи;
- на рисунке изобразить заряды, которые создают поле;
- обозначить все расстояния, которые необходимы для решения задачи, и нарисовать векторы напряженности полей, создаваемых каждым зарядом в интересующей нас точке.
2. Написать формулы для вычисления напряженности полей отдельных зарядов в заданной точке.

3. Спроектировать все векторы напряженности на оси координат и найти проекции суммарного вектора напряженности. Зная проекции суммарного вектора на оси координат E_x, E_y и E_z, можно вычислить модуль суммарного вектора.
4. Найдя напряженность суммарного поля, можно решить задачу о поведении какого-либо заряда, внесенного в это поле. Если заряд покоится, то для него записывается условие равновесия с учётом действия сил суммарного поля. Если заряд движется, то следует использовать второй закон Ньютона для определения кинематических характеристик движения этого заряда.
5. В случае непрерывного распределения зарядов процедура суммирования заменяется на интегрирование по некоторым пространственным переменным.

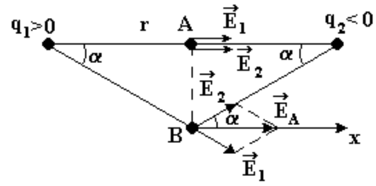
3.1.3. Примеры решения задач на принцип суперпозиции

<u>Пример 3.1</u>

Найти напряженность E электрического поля в точках A и B (см. рис.), лежащих на серединном перпендикуляре между точечными зарядами q_1 = 8 нКл и q_2 = –6 нКл, находящимися в вакууме. Расстояние между зарядами r = 10 см, AB = 5 см, ε = 1.

Дано:
q_1 = 8 нКл;
q_2 = -6 нКл;
r = 10 см;
AB = 5 см;
ε = 1

E_A - ?
E_B - ?



Анализ и решение:

На рисунке показано расположение зарядов и точек A и B, для которых надо найти напряженность поля, и показан выбор системы координат.

а). В данной точке A поле создается двумя точечными зарядами q_1 и q_2.

Напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в этой точке направлены в одну сторону, и поэтому суммарная напряженность находится как сумма напряжённостей полей отдельных зарядов

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

или в проекции на ось OX

$$E_A = E_1 + E_2.$$

Запишем формулы для напряженности поля точечных зарядов:

$$E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r/2)^2} \text{ и } E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r/2)^2}.$$

Для точки А получаем:

$$E_A = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r/2)^2} + \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r/2)^2} = \frac{|q_1| + |q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r/2)^2} = 50{,}4 \text{ кВ/м}.$$

б). В точке В векторы $\vec{E}_1{}'$ и $\vec{E}_2{}'$ направлены под углом 2α друг к другу. По правилу параллелограмма находим суммарный вектор, он направлен по оси X. По условию задачи расстояние АВ равно r/2 и, следовательно, $\alpha = 45^0$.

Тогда $E = \sqrt{E_1^2 + E^2}$ по теореме Пифагора.

Расстояния от точки В до зарядов одинаковы и равны $\frac{r}{2}\sqrt{2}$, поэтому

$$E_B = \sqrt{\left(k\frac{q_1}{\left(r\sqrt{2}/2\right)^2}\right)^2 + \left(k\frac{q_2}{\left(r\sqrt{2}/2\right)^2}\right)^2} = \frac{k\sqrt{2}}{2 \cdot r}\sqrt{q_1^2 + q_2^2}.$$

Вычислим напряженность суммарного поля в точке В

$$E_B = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2}}{0{,}01}\sqrt{36 \cdot 10^{-18} + 64 \cdot 10^{-13}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-9}\sqrt{100}}{0{,}01} = 7{,}6 \cdot 10^3$$

$$E_B = 7{,}6 \,\text{кВ/м}.$$

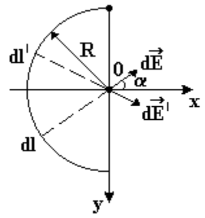
Ответ: напряженность электрического поля в точке А равна $E_А$ = 50.4 кВ/м и направлена от заряда q_1 к заряду q_2. В точке В напряженность направлена параллельно линии, соединяющей заряды, и равна $E_В$ = 7,6 кВ/м.

Пример 3.2

Положительный заряд $q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл равномерно распределен по тонкому проволочному полукольцу радиуса R= 20 см. Определить напряженность поля E в центре полукольца.

Дано:
$q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл;
$R = 20$ см;
$\varepsilon = 1$

E - ?



Анализ и решение: На рисунке показан выбор осей координат и вектор напряженности поля $d\vec{E}$, создаваемый в точке О элементарным зарядом $dq = \tau dl$.

Поле создается зарядом q, распределенным по тонкому полукольцу радиуса R. Линейная плотность заряда равна: $\tau = \dfrac{q}{\pi R}$.

В этом случае нельзя воспользоваться формулой напряженности для поля точечного заряда или бесконечной заряженной нити. Такую задачу можно решить, используя принцип суперпозиции. Разделим весь проводник на очень маленькие участки длиной dl, на каждый из которых приходится заряд $dq = \tau \cdot dl$. Такой заряд можно считать точечным и поле этого заряда рассчитать по формуле

$$dE = k\frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau dl}{R^2}.$$

Направление вектора $d\vec{E}$ показано на рисунке. Учитывая симметрию задачи, удобно начало отсчёта системы координат связать с точкой О и направить оси координат так, как изображено на рисунке.

Спроектируем вектор $d\vec{E}$ на оси координат:

$$dE_x = dE \cdot \cos\alpha;$$
$$dE_y = dE \cdot \sin\alpha.$$

Из симметрии видно, что каждому элементарному заряду dq найдется симметричный ему заряд dq'. Проекции напряженностей полей этих зарядов на ось ОУ дадут ноль при любых углах α.

Таким образом, надо найти только проекцию суммарного вектора E на ось ОХ. Понятно, что в случае непрерывного распределения заряда суммирование следует заменить интегрированием по всей длине проволоки, где расположен заряд.

$$E_x = \int\limits_{(q)} dE_x = \int\limits_{(q)} k\frac{dq\cos\alpha}{R^2} = \frac{k}{R^2}\int\limits_{(l)} \tau dl \cos\alpha.$$

В подынтегральное выражение входят две переменные l и α. Учитывая, что $\dfrac{dl}{R} = d\alpha$ и $dl = Rd\alpha$, заменим переменную интегрирования и получим

$$E_x = \frac{k\tau}{R^2}\int_{(\alpha)} Rd\alpha\cos\alpha = \frac{k\tau R}{R^2}\int_{\alpha 1}^{\alpha 2}\cos\alpha d\alpha$$

или

$$E_x = \frac{k\tau}{R}\sin\alpha\Big|_{\alpha 1}^{\alpha 2}.$$

Из рисунка видно, что $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}$, а $\alpha_2 = -\dfrac{\pi}{2}$.

Окончательно получаем

$$E_x = \frac{k\tau}{R}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = k\frac{q2}{\pi R^2};$$

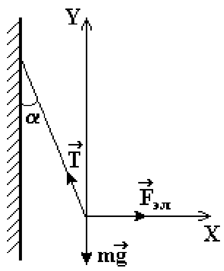
$$E_x = k\frac{q\cdot 2}{\pi\cdot R^2}; \qquad E_x = 9\cdot 10^9\,\frac{5\cdot 10^{-8}\cdot 8}{3{,}14\cdot 4\cdot 10^{-2}} = 7{,}2\,\text{кВ/м}.$$

Ответ: напряженность поля в центре кольца равна 7,2 кВ/м.

Пример 3.3

На рисунке изображены заряженная бесконечная плоскость с поверхностной плоскостью заряда σ = 40 мкКл/ м^2 и одноименно заряженный шарик с массой m = 1 г и зарядом q = 1 нКл. Какой угол α с плоскостью образует нить, на которой висит шарик?

Дано:
σ = 40 мкКл/м^2;
m = 1 г;
q = 1 нКл
α - ?



Решение:

Заряд находится в поле плоскости. На шарик действуют три силы, изображенные на рисунке. Запишем условие равновесия шарика: $\vec{T} + \vec{F}_{эл} + m\vec{g} = 0$.

Спроектируем полученное уравнение на оси координат:

$$\text{Ox: } F_{эл} - T\sin\alpha = 0;$$
$$\text{Oy: } T\cos\alpha - mg = 0.$$

Решая систему уравнений, получаем $F_{эл.} = mg \cdot \text{tg}\alpha$.

С другой стороны, $F_{эл.} = qE$, где E - напряженность электрического поля, созданного бесконечной плоскостью.

Из полученной системы уравнений имеем

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{F_{эл}}{mg}, \text{ или } \text{tg}\,\alpha = \frac{qE}{mg}.$$

Поле бесконечной плоскости можно выразить следующим образом:

$$E = \frac{\tau}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

В нашем случае заряд и плоскость находятся в воздухе, т.е. $\varepsilon = 1$.

Окончательно запишем

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{10^{-9} \cdot 40 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3} \cdot 10} = \frac{4}{2 \cdot 8{,}85}.$$

$$\text{tg}\alpha = 0{,}2259 \approx 0{,}226$$

Ответ: нить составляет с плоскостью угол $\alpha = 13^0$.

Пример 3.4

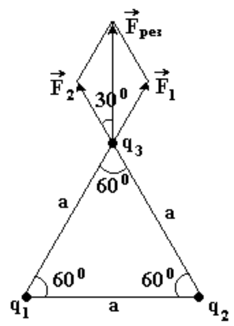
Три одинаковых точечных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = 2$ нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной а = 10 см. Определить модуль и направление силы F, действующей на один из зарядов со стороны двух других.

Дано:

$q_1 = q_2 = q_3 = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл;

$a = 10$ см

F - ?



Решение

Нарисуем три заряда и покажем направление двух сил, действующих со стороны первого и второго зарядов на третий.

Все заряды положительные, значит, они отталкиваются.

Нарисуем суммарный вектор силы, действующей на третий заряд. Из рисунка видно, что эта сила направлена вертикально вверх. Углы все известны.

Находим величину результирующей силы

$$F = F_1 \text{ Cos } 30^0 + F_2 \text{ Cos } 30^0,$$

где $F_1 = F_2 = k\dfrac{q_1 q_3}{a^2}$.

Окончательно получаем:

$$F = 2\frac{kq_1q_3}{a^2} \cdot \cos 30^0 ;$$

$$F = 2\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2^2 \left(10^{-9}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{0{,}01 \cdot 2} = 62 \cdot 10^{-7} \text{ Н} .$$

Ответ: сила, действующая на третий заряд со стороны двух других зарядов, равна $7.2 \cdot 10^{-6}$ Н и направлена вертикально вверх на нашем рисунке.

3.1.4. Задачи для самостоятельного решения

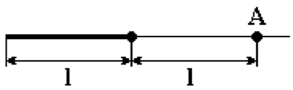
Задача 3.1. В центр квадрата, в каждой вершине которого находится заряд q = 2,33 нКл, помещен отрицательный заряд q_0. Найти этот заряд, если на каждый заряд "q" действует результирующая сила F = 0.

Ответ: q_0 = -2,23 нКл.

Задача 3.2. Две длинные одноименно заряженные нити расположены на расстоянии а = 10 см друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях $\tau_1 = \tau_2$ = 10 мкКл/м. Найти модуль и направление напряженности E результирующего электрического поля в точке, находящейся на расстоянии d = 10 см от каждой нити.

Ответ: E = 3,12 НВ/м. Поле направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через обе нити.

Задача 3.3. На отрезке прямого провода длиной l равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10^{-8}$ Кл/см. Определить напряженность поля в точке А, расположенной на расстоянии l от одного из концов стержня (см. рисунок).



Задача 3.4. Два шарика одинакового радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются, Какой заряд надо сообщить шарикам, чтобы сила натяжения стала равной T = 98 мН? Расстояние от точки подвеса до центра шарика l = 10 см; а масса каждого шарика m = 5 г.

Ответ: q = 1,1 нКл.

3.2. Применение теоремы Гаусса к расчету напряженности электрического поля

3.2.1. Основные понятия и соотношения

В случаях, когда поле создается симметричным распределением зарядов, можно найти зависимость напряженности поля от координат, используя теорему Гаусса.

Теорема Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью, деленной на электрические постоянные ε и ε_0.

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

где $\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S}$ - поток вектора напряженности через замкнутую поверхность;

q – суммарный заряд, охватываемый этой поверхностью.

3.2.2. Порядок решения задач

1. Разобраться с симметрией заданного распределения зарядов и нарисовать картину силовых линий поля.

Выбрать поверхность интегрирования, учитывая симметрию задачи. Вид поверхности должен быть таким, чтобы силовые линии либо скользили по поверхности, либо были ей перпендикулярны. Разумный выбор поверхности интегрирования упрощает взятие интеграла при вычислении потока вектора напряженности через эту поверхность.

2. Найти поток вектора $\vec{E}$ через выбранную поверхность.
3. Сосчитать заряд, охватываемый этой поверхностью.
4. Подставить в теорему теоретически полученные выражения. И из полученного уравнения выразить искомую величину E.
5. Если в задаче заданы численные значения величин, то, подставив их, получим количественный результат.

3.2.3. Примеры решения задач на применение теоремы Гаусса.

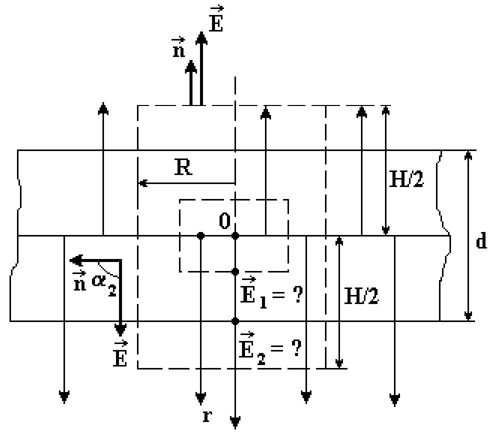
В теоретической части этого раздела уже были рассмотрены примеры решения задач на определение напряженности электростатического поля с применением теории Гаусса. Рассмотрим еще несколько примеров решения этого типа задач.

<u>Пример 3.5</u>

Имеется плоскопараллельная пластина с ε=2 толщиной d = 3 см равномерно заряженная по объему с объемной плотностью $\rho = 2\cdot10^{-8}$ Кл/м^3. Найти напряженность электрического поля пластины внутри нее и вне, как функцию расстояния от центра пластины. Построить график зависимости $E = f(r)$ (см. рисунок). Вычислить величину напряженности поля на расстояниях r_1 = 1 см и r_2 = 3 см от центра пластины.

Дано:
d = 3 см;
$\rho = 2\cdot10^{-8}$ Кл/м^3;
r_1 = 1 см;
r_2 = 3см;
$E = f(r)$

E_1 = ?
E_2 = ?



Анализ и решение

1. Пластину считаем бесконечно протяженной, и поэтому в каждой точке пространства напряженность поля будет направлена перпендикулярно пластине. Силовые линии будут представлять собой параллельные прямые, перпендикулярные пластине. Учитывая симметрию задачи, выбираем замкнутую поверхность в виде цилиндра радиуса R и высотой H (можно было бы и в виде прямоугольного параллелепипеда). Рисунок выполнен в сечении, перпендикулярном самой заряженной пластине. Сечение выбранной поверхности изображено прерывистой линией. Нарисовано два цилиндра, оси которых совпадают с силовыми линиями электростатического поля, для двух случаев определения напряженности поля - внутри и вне пластины. Основания цилиндров симметричны относительно середины пластины.

2. Вычислим поток вектора $\vec{E}$ через выбранную поверхность. Полный поток можно сосчитать как сумму потоков через два основания цилиндра и через его боковую поверхность

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 2\int_{S_{осн}} EdS\cos\alpha_1 + \int_{S_{бок}} EdS\cos\alpha_2 .$$

Как видно из рисунка, $\alpha_1 = 0^0$, а $\alpha_2 = 90^0$.

С учетом этого получим

$$\oint_S \vec{E}dS = 2\int_{S_{осн}} EdS\cdot 1 + 0 = 2ES_{осн} = 2E\pi R^2 .$$

Перед первым интегралом стоит множитель «2», т.к. два основания симметрично расположены и модуль вектора E на равных расстояниях от пластины будет одинаков.

3. Посчитаем заряд, охватываемый этой поверхностью.

$$\sum q = \rho V = \rho\pi R^2 h\,.$$

а). Если искомая точка лежит внутри пластины, то $h = 2r$, где r – расстояние от центра пластины. Поверхность интегрирования вся расположена внутри пластины.

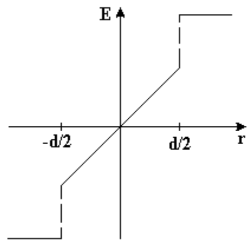
б). Если искомая точка лежит вне пластины, то $h = d$. Высота поверхности интегрирования H больше толщины пластины d. Заряд находится только внутри пластины.

4. Воспользуемся теоремой Гаусса

$$2ES_{осн} = \frac{\sum q}{\varepsilon\varepsilon_0}\,.$$

а). $E_1\pi R^2 = \dfrac{\rho\pi R^2 r}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \dfrac{\rho r}{\varepsilon\varepsilon_0}$ - напряженность поля внутри пластины на расстоянии r от ее середины;

б). $2E_2\pi R^2 = \dfrac{\rho\pi R^2 d}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \dfrac{\rho d}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ - напряженность поля вне пластины.



5. Вычислим напряженность поля в точках с $r_1 = 1$ см и $r_2 = 3$ см

$$E = \frac{2\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}01}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 11.3 \text{ В/м;}$$

$$E_2 = \frac{2\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}03}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 33.9 \text{ В/м.}$$

Нарисуем график зависимости E от r. Внутри пластины напряженность поля возрастает с увеличением r. Вне пластины поле однородное.

Скачок значения напряженности при r = ±d/2 происходит из-за изменения диэлектрической проницаемости среды. Внутри пластины она равна $\varepsilon = 2$, а вне нее $\varepsilon = 1$, поэтому напряженность поля скачком увеличивается в два раза.

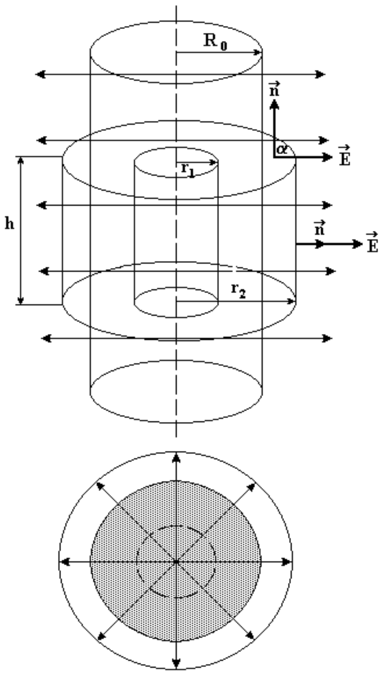
<u>Пример 3.6</u>

Имеется длинный заряженный равномерно по объему цилиндр радиуса $R_0 = 2$ см, с $\varepsilon_1 = 5$. Плотность зарядов ρ постоянна и равна 4 нКл/м^3.

Найти напряженность поля в точках, расположенных на расстояниях $r_1 = 1$ см и $r_2 = 3$ см от оси цилиндра. Построить график зависимости $E(r)$. r – радиальная координата.

Анализ и решение

1. Симметрия данного заряда позволяет считать, что поле обладает осевой симметрией, т.е. силовые линии – радиальные прямые, перпендикулярные оси цилиндра. На нижнем рисунке показаны силовые линии поля цилиндра в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.



Замкнутую поверхность для нахождения потока удобно в этом случае выбрать в виде цилиндра, ось которого совпадает с осью заряженного тела.

В нашей задаче надо найти напряженность в двух случаях: а) когда $r_1 < R_0$; б) когда $r_2 > R_0$.

Поверхности для этих случаев изображены на рисунке пунктирной линией. Они отличаются радиусами. Каждый раз радиус цилиндра равен расстоянию от оси до точки, в которой находится поле.

2. Вычислим поток вектора $\vec{E}$ через поверхность цилиндра некоторого радиуса r. Поток $\oint \vec{E} d\vec{S}$ через замкнутую поверхность можно представить как сумму потоков через основания цилиндра и через боковую поверхность

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 2 \int\limits_{S_{осн}} \vec{E} d\vec{S} + \int\limits_{S_{бок}} \vec{E} d\vec{S} = 2 \int\limits_{S_{осн}} EdS \cos\alpha_1 + \int\limits_{S_{бок}} EdS \cos\alpha_2 .$$

Из соображений симметрии очевидно, что потоки через основания будут одинаковыми. Поэтому перед интегралом стоит «2».

Из рисунка видно, что угол $\alpha_1 = 90^0$, а $\alpha_2 = 0^0$. Учитывая это, получим

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \int\limits_{S_{бок}} EdS \cos 0^0 .$$

Величина E на равных расстояниях от оси цилиндра будет иметь одинаковые значения и ее можно вынести за знак интеграла

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = E \int\limits_{S_{бок}} dS = ES_{бок} .$$

Для наших двух случаев получаем

а) $\oint \vec{E} d\vec{S} = E 2\pi r_1 h$;

б) $\oint \vec{E} d\vec{S} = E 2\pi r_2 h$.

3. Вычислим заряд, охватываемый поверхностью:

$\sum q = \rho V = \rho \pi r^2 h$,

и для двух случаев получаем:

а) $\sum q = \rho \pi r_1^2 h$;

б) $\sum q = \rho \pi R_0^2 h$, т.к. заряд находится только внутри цилиндра радиуса R_0, а дальше его нет.

4. Подставим полученные выражения в теорему Гаусса

а) $E_1 2\pi r_1 h = \dfrac{\rho \pi r_1^2 h}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}$;

где ε_1 – диэлектрическая проницаемость материала заряженного цилиндра, по условию $\varepsilon_1 = 5$;

получаем $E_1 = \dfrac{\rho r_1}{2\varepsilon_1 \varepsilon_0}$;

$$E_1 = \frac{4 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}01}{2 \cdot 5 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 0{,}45 \text{ В/м}.$$

б) $E_2 2\pi r_2 h = \dfrac{\rho \pi R_0^2 h}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}$;

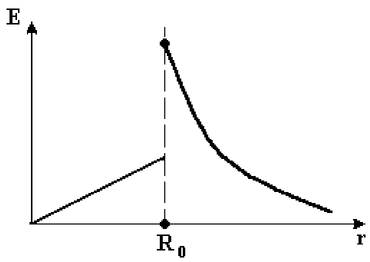
$$E_2 = \frac{\rho R_0^2}{2\varepsilon_2 \varepsilon_0 r_2};$$

$\varepsilon_2 = 1$, т.к. цилиндр находится в воздухе;

$$E_1 = \frac{4 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 0{,}03 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 3{,}0 \text{ В/м}.$$

Построим график зависимости $E = f(r)$.

Внутри цилиндра радиуса R_0 зависимость E от r имеет вид



$E_1 = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_1 \varepsilon_0}$, где r – любое расстояние меньшее R_0, т.е. график – прямая линия.

А вне цилиндра $E_2 = \dfrac{\rho R_0^2}{2\varepsilon_2 \varepsilon_0 r}$, где r – расстояние, большее R_0.

Из полученных выражений видно, что напряженность электрического поля внутри цилиндра увеличивается с удалением от цилиндра, а вне его напряженность убывает обратно пропорционально расстоянию от оси цилиндра.

Изменение E скачком при переходе из цилиндра в воздух происходит из-за изменения диэлектрической проницаемости среды.

3.2.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.5. Используя теорему Гаусса, определите напряженность электрического поля равномерно заряженного эбонитового цилиндра радиусом R = 20 см внутри и вне его, если объемная плотность заряда ρ = 2 нКл/м^3.

Постройте график зависимости E от расстояния до центра цилиндра. Диэлектрическая проницаемость эбонита ε = 2,6.

Задача 3.6. Используя теорему Гаусса, рассчитайте напряженность электрического поля равномерно заряженной полой сферической поверхности радиусом R = 15 см, если полный заряд сферы q = 30 нКл.

Постройте график зависимости величины напряженности электрического поля E от расстояния до центра сферы.

Задача 3.7. Поле создается заряженной полой металлической сферой радиусом R = 15 см и точечным зарядом $q = 10^{-9}$ Кл, расположенным в центре сферы. Величина поверхностной плотности заряда сферы σ = 20 нКл/м^2.

Постройте график зависимости напряженности поля от расстояния до центра сферы.

Задача 3.8. Поле создано зарядом бесконечного тонкостенного цилиндра радиусом R = 20 см и заряженной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 5\cdot 10^{-9}$ Кл/м, расположенной вдоль оси цилиндра.

Пользуясь теоремой Гаусса, получите значение напряженности электрического поля внутри и вне цилиндра как функцию расстояния от центра цилиндра. Поверхностная плотность заряда цилиндра $\tau = 10^{-8}$ Кл/м^2.

Построить график полученной зависимости.

3.3. Потенциал. Разность потенциалов. Работа по перемещению заряда в электрическом поле. Связь между напряженностью *E* и потенциалом φ электрического поля

3.3.1. Основные понятия и соотношения

$\varphi = \dfrac{W_{эл}}{q^+}$ - определение потенциала электрического поля,

$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\varepsilon r}$ – формула для вычисления потенциала поля точечного или сферического заряда.

Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля имеет вид:

$$\vec{E} = -gr\vec{ad}\varphi.$$

В случае радиально-симметричного поля это формула примет вид:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr},$$

где r- координата точки поля по радиальной оси.

Для однородного поля формула принимает вид :

$$E = \frac{U}{d},$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$, а d - расстояние между эквипотенциальными поверхностями с потенциалами φ_1 и φ_2.

По определению работы переменной силы

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = \int_1^2 Fdl\cos\alpha.$$

Для работы сил электрического поля имеем

$$A = \int_1^2 qEdl\cos\varphi.$$

Электрические поля - поля потенциальные, для таких полей работа сил поля приводит к убыли потенциальной энергии

$$A = -\Delta W,$$

где A - работа сил электрического поля;

ΔW - изменение энергии электрического заряда при его перемещении из одной точки поля в другую.

При решении задач этого раздела удобно использовать закон сохранения или изменения энергии для описания поведения заряда в поле.

3.3.2. Порядок решения задач

Задачи, в которых необходимо вычислить работу по перемещению электрического заряда в электрическом поле, созданном другими зарядами, можно решать двумя способами. Первый путь решения сводится к непосредственному вычислению работы сил поля по перемещению заряда из одной точки поля в другую. Второй подход к таким задачам использует тот факт, что работа сил потенциального поля всегда равна убыли потенциальной энергии заряда в поле: $A = -\Delta W = -q(\varphi_1 - \varphi_2)$.

где q - заряд, переносимый в поле,

φ_1 и φ_2 - потенциал v точек поля.

Если использовать это выражение, то решение задачи сводится к нахождению потенциала тех точек поля, в которых находился заряд в интересующие нас моменты времени.

Последовательность действий при решении таких задач:

1. Нарисовать силовые линии поля. Обозначить те точки, в которых находился заряд в начальный и конечный моменты времени, разобраться, какие скорости имел заряд в этих точках.

2. В этих выделенных точках рассмотреть характеристики $\left(\varphi, \vec{E}\right)$ поля и самого заряда, который движется в этом поле (W_k; W_n).

3. Для вычисления зависимости потенциала φ от координат или от одного из расстояний использовать связь между напряженностью E и потенциалом электрического поля

$$\vec{E} = -gra\vec{d}\varphi$$

или

$$E = \frac{d\varphi}{dx}, \text{ или } E = \frac{d\varphi}{dr},$$

и получить $\varphi = f(x)$ или $\varphi = f(r)$

4. Записать выражение для работы сил поля в виде $A = \int\limits_1^2 qEdl\cos\varphi$ или $A_{12} = -q(\varphi_1 - \varphi_2)$.

В тех случаях, когда на заряд действуют только силы электрического поля, удобно воспользоваться законом сохранения энергии для заряда.

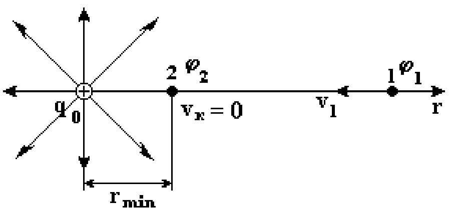
$$W_{к1} + W_{п1} = W_{к2} + W_{п2}.$$

5. Решая полученные уравнения, получить искомую величину и сосчитать численное значение искомых величин.

3.3.3. Примеры решения задач

Пример 3.7

Шарик массой m = 40 мг, имеющий положительный заряд q =1 нКл, движется со скоростью V = 10 см/с. На какое расстояние r может приблизиться шарик к положительному точечному заряду q_0 = 1,33 нКл?



Дано:
m = 40 мг = $40 \cdot 10^{-6}$ кг;
q = 1 нКл = 10^{-9} Кл;
v_1 = 10 см/с = 0,1 м/с;

q = 1,33 нКл = $1{,}33 \cdot 10^{-9}$ Кл

---

r_{min} = ?

Заряд q движется в отрицательном направлении оси r, и сила электрического поля совершает при этом отрицательную работу, что приводит к превращению кинетической энергии этого заряда в потенциальную энергию. На заряд действует только электрическая сила поля точечного заряда, поэтому в этой задаче можно использовать закон сохранения энергии.

Рассмотрим два положения заряда q.

Точка 1 - заряд q находится на достаточно далеком расстоянии от заряда q_0, и потенциал φ_1 в этой точке поля можно считать равным нулю и $W_{п1}$ = 0. Скорость заряда в этом случае отлична от нуля, и кинетическая энергия равна $$W_{k_1} = \frac{mV_0^2}{2};$$

Точка 2 - потенциал $\varphi_2 \neq 0$ и $W_{п2} = q \cdot \varphi_2$, а скорость движущегося заряда обращается в ноль, когда заряд q приблизится к заряду q_0 на минимальное расстояние, $V = 0$ и $W_{к2} = 0$.

По закону сохранения энергии $0 + \dfrac{mV_0^2}{2} = q\varphi_2 + 0.$

Потенциал поля точечного заряда можно сосчитать по формуле $\varphi = k\dfrac{q_0}{r_{min}}$, для воздуха ε =1.

Окончательно получим

$$\frac{mV_0^2}{2} = qk\frac{q_0}{r_{min}}.$$

$$r_{min} = \frac{2kqq_0}{mV_0^2}.$$

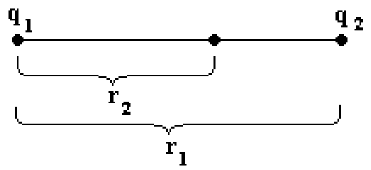
Подставляем численные значения, получим

$$r_{min} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-9}}{40 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}01} = 6 \cdot 10^{-2}\,\text{м} = 6\,\text{см}.$$

Ответ: заряд q приблизится к другому заряду на минимальное расстояние, равное 6 см.

<u>Пример 3.8</u>

Два шарика с зарядами q_1 = 6,66 нКл и q_2 = 13,33 нКл находятся на расстоянии r_1 = 40 см друг от друга. Какую работу A надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния r_2 = 25 см?



Дано:
q = 6,66 нКл;
q = 13,33 нКл;
r = 40 см = 0,40 м;
r = 25 см = 0,25 м

A - ?

Анализ и решение

Для того чтобы сблизить одноименно заряженные шарики, необходимо совершить работу против сил электрического поля. Поэтому работа электрического поля при этом будет отрицательной.

Будем считать, что первый шарик неподвижен и создает поле, а второй перемещается в поле первого заряда.

Тогда $A_{эл} = \ q_2\ (\varphi_1 - \varphi_2)$, где φ_1 и φ_2- - потенциалы электрического поля, созданного первым шариком на расстояниях r_1 и r_2 от него. Потенциал поля точечного заряда q_1 в точках на расстояниях r_1 и r_2 равен

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} \text{ и } \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_2}.$$

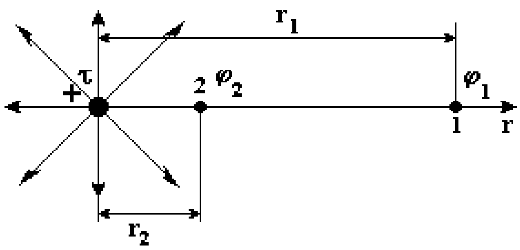
Тогда

$$A_{эл} = q_2\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = -1{,}2\cdot 10^{-6}\,\text{Дж.}$$

Работа же внешних сил $A = -A_{эл}$ = 1,2·10^{-6} Дж.

Ответ: для того чтобы сблизить указанные заряженные шарики, необходимо совершить работу A = 1,2·10^{-6} Дж.

Пример 3.9



Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью с линейной плотностью зарядов τ = 0,2 мк Кл/м. Какую скорость V получит покоящийся электрон под действием сил поля, приблизившись к нити с расстояния r_1 = 1 см до расстояния r_2 = 0,5 см.

Дано:
τ = 0,2 мк Кл/м = $2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м ;
r_1 = 1 см = 0,01 м;
r_2 = 0,5 см = $5 \cdot 10^{-3}$ м;
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг;
$V_0 = 0$

V - ?

На рисунке показаны силовые линии поля нити в плоскости, перпендикулярной самой нити, и радиальная ось.

При движении отрицательной частицы силы поля будут совершать положительную работу, и это приведет к тому, что потенциальная энергия заряда будет убывать, а кинетическая возрастать.

В первой точке электрон имеет только потенциальную энергию, поскольку в начальный момент он покоился,

$$W_{к1} = 0, \qquad W_{п1} = e\varphi_1.$$

Во второй точке у заряда будет и потенциальная и кинетическая энергия

$$W_{k_2} = \frac{mV^2}{2}; \qquad W_{п2} = e\varphi_2.$$

По закону сохранения энергии

$$W_{к1} + W_{п1} = W_{к2} + W_{п2}$$

или

$$-e\varphi_1 = -e\varphi_2 + \frac{mV^2}{2};$$

$$e(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{mV^2}{2}.$$

Для нахождения (φ_2 - φ_1) воспользуемся формулой, связывающей E с потенциалом φ. Для случая радиальной симметрии

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \text{ или } Edr = -d\varphi.$$

Напряженность поля нити нам известна: $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\tau}{\varepsilon r}$, для воздуха $\varepsilon = 1$, с учетом этого, получаем $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\tau}{r}dr = -d\varphi.$

Проинтегрируем это уравнение по координате r

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\tau}{r} dr = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi,$$

вынесем постоянные множители из-под интеграла и получим

$$\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi.$$

Используя табличные интегралы, получим

$$\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} = -\varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2},$$

или

$$\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Подставляя полученное уравнение в выражение закона сохранения энергии, получим

$$-\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{mV^2}{2},$$

отсюда

$$V = \sqrt{\frac{2e\tau}{2\pi\varepsilon_0 m} \ln \frac{r_1}{r_2}};$$

Подставляя численные значения, получаем

$$V = \sqrt{\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln 2}{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 2{,}97 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

Ответ: электрон приобретет скорость, равную $2{,}97 \cdot 10^7$ м/с.

3.3.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.9. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью. Двигаясь под действием этого поля от точки, находящейся на расстоянии r_1 = 1 см от нити, до точки r_2 = 4 см, α - частица изменила свою скорость от $V_1 = 2 \cdot 10^5$ м/с до $V_2 = 3 \cdot 10^6$ м/с. Найти линейную плотность заряда τ на нити.

Ответ: τ = 3,7 мкКл/м.

Задача 3.10. Около заряженной бесконечно протяженной плоскости находится точечный заряд q = 0,66 нКл. Заряд перемещается по линии напряженности поля на расстояние Δr = 2 см; при этом совершается работа $A = 500^{-6}$ Дж. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости.

Ответ: $\tau = 6{,}6\,\text{мкКл}/\text{м}^2$.

Задача 3.11. Какая работа A совершается при перенесении точечного заряда q = 20 нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии r = 1 см от поверхности шара радиусом R = 1 см с поверхностной плотностью заряда σ = 10 мкКл/м^2 на плоскости.

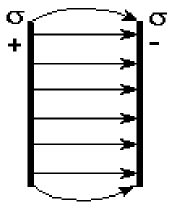
Ответ: A = 113 мк Дж.

Задача 3.12. Шарик с массой m = 1 г и зарядом q = 10 нКл перемещается из точки 1, потенциал которой φ_1 = 600 В, в точку 2, потенциал которой φ_2 = 0. Найти его скорость в точке 1, если в точке 2 она стала равной V_2 = 20 см/с.

Ответ: V_1 = 16,7 см/с.

3.4. Задачи на электроемкость, конденсаторы и энергию электрического поля

3.4.1. Основные понятия и определения



$C = \dfrac{q}{\varphi}$ - электроемкость уединенного проводника;

$C = 4\pi\varepsilon o\varepsilon R$ - емкость шара.

Система заряжения проводников, поле которых сосредоточено в ограниченном объеме пространства, образует конденсатор.

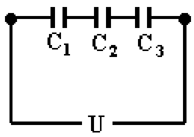
Емкость С такой системы проводников определяется формой и размерами проводников и средой в том месте, где заряды создают электрические поля.

Примером является плоский конденсатор, который состоит из двух параллельных плоскостей, расположенных достаточно близко друг к другу. Поле плоского конденсатора можно считать однородным.

$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ - напряженность поля конденсатора;

$C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ - емкость плоского конденсатора, где S – площадь пластины конденсатора, d – расстояние между обкладками конденсатора.

При последовательном соединении конденсаторов заряды одинаковы, а напряжения складывают.

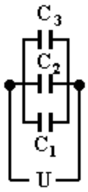


$q_1 = q_2 = q_3$;

$U_1 = U_1 + U_2 + U_3$;

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

При параллельном соединении конденсаторов



$$q = q_1 + q_2 + q_3;$$
$$U = U_1 = U_2 = U_3;$$
$$C = C_1 + C_2 + C_3.$$

Энергия уединенного заряженного проводника может быть найдена по одной из формул

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

В случае плоского конденсатора

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ESd}{2} = \frac{\sigma^2 Sd}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Объемная плоскость энергии ϖ - это энергия, приходящаяся на единицу объема поля,

$$\varpi = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

3.4.2. Порядок решения задач

Задачи этого раздела связаны с изменением емкости конденсаторов за счет внешнего воздействия на них, могут изменяться размеры конденсатора или среда между обкладками конденсатора. При этом изменение емкости может сопровождаться перемещением зарядов по системе. При изменении емкости изменяется и энергия поля конденсатора.

Порядок решения задач:

1. Нарисовать систему конденсаторов или один конденсатор в различных ситуациях.

2. Проанализировать соединение конденсаторов, понять, какие изменения происходят с системой и при этом подключен источник или нет.

Поняв это, записать, какие характеристики системы изменяются, а какие остаются постоянными.

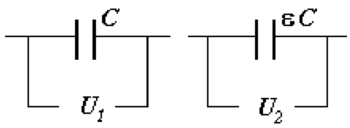
3. Используя основные определения и законы, составить систему уравнений, позволяющую найти неизвестные.

4. Решить систему уравнений, найти искомые величины.

3.4.3. Примеры решения задач

Пример 3.10

Площадь пластин плоского воздушного конденсатора S = 0,01 м^2, расстояние между ними d = 5 мм. К пластинам приложена разность потенциалов U_1 = 300 В. После отключения конденсаторов от источника напряжения пространство между пластинами заполняется эбонитом. Какова будет разность потенциалов U_2 между пластинами после заполнения? Найти емкости конденсатора C_1 и C_2 и поверхностные плотности заряда σ_1 и σ_2 на пластинах до и после заполнения. ε = 2,6.



Дано:
S = 0,01 м^2
d = 5 мм = 0,005 м;
U_1 = 300 В;
ε = 2,6

C_1 - ? C_2 - ?
σ_1 - ? σ_2 - ? U_2 - ?

Решение :

Конденсатор заполняют эбонитом при отключенном источнике, следовательно, заряд не изменяется $q_1 = q_2$. Поверхностная плотность зарядов также не изменяется: $\sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{q}{S}$.

В первом случае $E_1 = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$ и $U_1 = E_1 d = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} d$.

Во втором случае $E_2 = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon\varepsilon_0}$ и $U_2 = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon\varepsilon_0} d$.

Сравнивая эти напряжения, получаем $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow U_2 = \dfrac{U_1}{\varepsilon}$.

Емкость конденсатора можно вычислить по формуле $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$.

В первом случае среда между обкладками - воздух, т.е. ε_1 = 1, а во втором - эбонит (ε_2 = 2,6).

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad \text{и} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Подставив численные значения, получаем

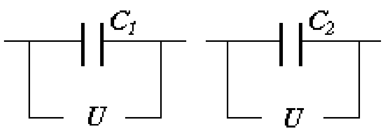
U_2 = 115 В, C_1 =17,7 пФ, C_2 = 46 пФ;

$\sigma_1 = \sigma_2$ =531 нКл/м^2.

Ответ: после заполнения конденсатора эбонитом установилось напряжение, равное 115 В, емкости конденсатора до и после заполнения соответственно равны 17,7 и 46 пФ, поверхностные плотности заряда будут одинаковы и равны 531 нКл/м.

<u>Пример 3.11</u>

Площадь пластин плоского воздушного конденсатора S = 0,01 м^2, расстояние между ними d_1 = 2 см. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов U = 3 кВ. Какова будет напряженность E_2 поля конденсатора, если, не отключая его от источника напряжения, пластины раздвинуть до расстояния d_2 = 5 см? Найти энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин.



Дано:
S = 0,01 м^2;
d_1 = 2 см = 0,02 м;
U = 3 кВ = 3 10 В;
d_2 = 5 см = 0,05 м

E_2 - ?
W_1 - ? W_2 -?

Решение

Конденсатор не отключается от источника, следовательно $U_1 = U_2 = U$. Заряд изменяется: $q_1 \neq q_2$. Емкость конденсатора при раздвижении пластин уменьшается, т.к. увеличивается расстояние между пластинами.

Чем больше d, тем меньше емкость.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} \qquad \text{и} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}.$$

Найдем напряженность поля после раздвижения пластин

$$E_2 = \frac{U}{d} = 6 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

Энергия конденсатора до раздвижения пластин

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d_1} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

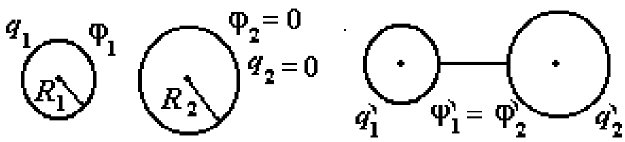
После раздвижения пластин энергия конденсатора

$$W_2 = \frac{C_2 U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d_2} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Ответ: напряженность поля в конденсаторе после раздвижения пластин $E_2 = 6 \cdot 10^4$ В/м; энергии конденсатора до раздвижения и после раздвижения пластин равны соответственно $W_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ Дж и $W_2 = 8 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Пример 3.12

Заряженный шар 1 радиусом R_1 = 2 см приводится в соприкосновение с незаряженным шаром 2, радиус которого R_2 = 3 см. После того как шары разъединили, энергия шара 2 оказалась равной W_2 = 0,4 Дж. Какой заряд q_1 ,был на шаре 1 до соприкосновения с шаром 2?



Дано
R_1 = 2 см = 0,02 м;
R_2 = 3 см = 0,03 м;
W_2 = 0,04 Дж;
$q_2 = 0$

q_1 - ?

Решение

При соприкосновении шаров заряд перераспределяется по поверхностям 2 шаров так, чтобы потенциалы всех точек поверхностей стали одинаковы

$\varphi_1' = \varphi_2'$.

Суммарный заряд шаров после разъединения равен заряду первого шара до соединения

$q_1 = q_1' + q_2'$.

Потенциал каждого шара можно вычислить:

$$\varphi_1' = k\frac{q_1'}{R_1} \quad \text{и} \quad \varphi_2' = k\frac{q_2'}{R_2}.$$

Так как потенциалы равны, получаем

$$k\frac{q_1'}{R_1} = k\frac{q_2'}{R_2}.$$

Заряд второго шарика можно определить, поскольку известна энергия этого шара после разъединения.

$$W_2 = \frac{q_2'}{2C_2}, \text{ где } C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2.$$

Заряд второго шара после разъединения шаров равен

$$q_2' = 2C_2W_2 = 2\cdot 4\pi\varepsilon_0 R_2\ W_2.$$

Теперь можно найти заряд q_1'

$$q_1' = \frac{R_1}{R_2}q_2' = \frac{R_2 8\pi\varepsilon_0 R_2 W_2}{R_1}.$$

Система проводников изолированная и полный заряд системы не изменяется, поэтому начальный заряд первого шара равен сумме зарядов двух шаров после разъединения: $q_1 = q_{1'} + q_2'$

Окончательно имеем:

$$q_1 = 8\pi\varepsilon_0 R_2 W_2 + \frac{8\pi\varepsilon_0 R_2{}^2 W_2}{R_1} = 8\pi\varepsilon_0 R_2 W_2\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right).$$

Подставив численные значения, получим

q_1 = 2,7 мкКл.

Ответ: первый шар в начальный момент имел заряд 2,7 мкКл.

<u>Пример 3.13</u>

Пластины плоского конденсатора площадью S = 100 см^2 каждая притягиваются друг к другу с силой F =4,9·10^{-3}Н. Пространство между пластинами заполнено слюдой. Найти: 1) заряды, находящиеся на пластинах q; 2) напряженность поля между пластинами E; 3) энергию в единице объема поля ϖ, $\varepsilon_{сл} = 6$.

Дано:

S = 0,01 м^2

F = 4,9·10^{-3} Н

$\varepsilon_{ел} = 6$

E - ? q - ? ϖ - ?

Решение:

Пластины конденсатора заряжены разноименными зарядами и поэтому притягиваются друг к другу . Поле одной пластины действует на заряд другой с силой $F = q\cdot E_1$, где E_1 - напряженность поля одной пластины, а q – заряд другой пластины.

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad \sigma = \frac{q}{S},$$

тогда сила взаимодействия пластин равна $F = \dfrac{q \cdot q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \dfrac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$.

Отсюда найдем заряд одной пластины

$$q = \sqrt{F \cdot 2 \cdot \varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Зная заряд, определим напряженность поля конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Объемная плотность энергии равна

$$\varpi = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 q^2}{2 \cdot S^2 \varepsilon^2 {\varepsilon_0}^2} = \frac{q^2}{2 \cdot \varepsilon\varepsilon_0 S^2}.$$

Подставим выражение для q, получим

$$\varpi = \frac{2 \cdot \varepsilon\varepsilon_0 SF}{2 \cdot \varepsilon\varepsilon_0 S^2} = \frac{F}{S}.$$

Вычислим численные значения заряда одной пластины, напряженность поля конденсатора и объемную плотность энергии поля конденсатора:

$$q = 10^{-7} \text{ Кл}; \quad E = \frac{10^{-7}}{0{,}01 \cdot 6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 1{,}9 \cdot 10^5 \text{ В/м}.$$

$$\varpi = \frac{1{,}9 \cdot 10^5}{10^{-2}} = 1{,}9 \cdot 10^7 \text{ Дж/м}^3.$$

Ответ: а) на одной пластине находится заряд равный 10 Кл, напряженность поля равна $1{,}9 \cdot 10^5$ В/м, объемная плотность энергии равна $1{,}9 \cdot 10^7$ Дж/м^3 .

3.4.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.13. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Его энергия при этом W = 20 мкДж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Работа, которую надо было совершить против сил электрического поля, чтобы вынуть диэлектрик, A = 70 мкДж. Найти диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика.

Ответ: ε = 4,5.

Задача 3.14. Пластины плоского конденсатора площадью S = 0,01 м^2 каждая притягиваются друг к другу F = 30 мН. Пространство между пластинами заполнено слюдой. Найти заряды q, находящиеся на пластинах, напряженность E поля между пластинами и объемную плотность энергии W_0 поля.

Ответ:q = 17,7 мкКл; E = 333 кВ/м; W_0 = 695 кДж.

Задача 3.15. Два металлических шарика, первый с зарядом q_1 = 10 нКл и радиусом R_1 = 3 см и второй с потенциалом φ_2 = 3 кВ и радиусом R_2 =2 см, соединены проволочкой, емкостью которой можно пренебречь.

Найти: а) потенциал φ_1 первого шарика до разряда;

б) заряд q_2 второго шарика до разряда;

в) энгергии W_1 и W_2 каждого шарика до разряда;

г) заряд q_1' и потенциал φ_1' первого шарика после разряда;

д) заряд q_2' и потенциал φ_2' второго шарика после разряда;

е) энергию W соединенных проводником шариков;

ж) работу разряда.

Ответ: а) φ_1 = 3 кВ; б) q_2 = 20 нКл; в) W_1 = 15 мкДж, W_2 = 90 мкДж; г) q_1 = 18 нКл, φ_1' = 5,4 кВ; д) q_2 = 12 нКл, φ_2' = 5,4 кВ; е) W = 81 мк Дж; ж) A = 24 мкДж.

Задача 3.16. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора S = 0,01 м^2, расстояние между ними d = 5 мм. Какая разность потенциалов U была приложена к пластинам конденсатора, если известно, что при разряде конденсатора выделилось Q = 4,19 мДж тепла?

Ответ: U = 21,7 кВ.

3.5. Законы постоянного тока

Задачи этого раздела посвящены применению законов постоянного электрического тока к расчету электрических цепей. Для решения этих задач используются законы Ома для однородного участка цепи, закон Ома для замкнутой цепи и закон Джоуля – Ленца.

3.5.1. Основные понятия и определения

Сила тока - скалярная физическая величина, численно равная заряду, переносимому через поперечное сечение проводника в единицу времени

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Плотность тока $j = \dfrac{dI}{dS}$ - векторная величина. Её модуль численно равен величине заряда, протекающего через единицу поперечного сечения проводника за единицу времени. Направлен вектор $\vec{j}$ в сторону движения положительных зарядов на данном участке проводника.

Сопротивление проводника равно

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ - удельное сопротивление материала проводника, l - длина проводника, S - площадь поперечного сечения проводника. Удельное сопротивление зависит от температуры следующим образом

$$\rho = \rho_0 \,(1 + \alpha t),$$

где ρ_0 - удельное сопротивление материала проводника при 0^{o}С. Его численное значение можно взять из справочников или оно приводится в задаче.

α - температурный коэффициент сопротивления,

$$\alpha = \frac{dR}{RdT}.$$

Расчет сопротивления участка цепи при параллельном и последовательном соединении отдельных проводников

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots; \qquad\qquad R = R_1 + R_2 + \ldots$$

(параллельное соединение) (последовательное соединение)

Однородным является участок цепи, на котором работу по перемещению зарядов совершают только электрические силы, т.е. на участке нет ЭДС. Закон Ома для однородного участка цепи

$$I = \frac{U}{R}.$$

Закон Ома для полной цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + 2}.$$

Закон Ома в дифференциальной форме

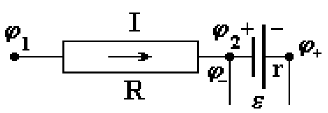
$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \tau\vec{E},$$

где τ - удельная проводимость проводников,

ρ - удельное сопротивление проводников.

Закон Ома для неоднородного участка цепи

$$U = \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \pm \varepsilon.$$



а) $\varphi_1 > \varphi_2$

и $\varphi_+ > \varphi_-$

В этом случае $\varphi_1 - \varphi_2 = IR + \varepsilon$ или $U = (\varphi_1 - \varphi_2) - \varepsilon$

б) $\varphi_1 > \varphi_2$

$$\varphi_+ > \varphi_-$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR - \varepsilon.$$

При таком включении ЭДС падение напряжения на всем участке

$$U = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon.$$

Работа электрического тока на участке цепи определяется следующим образом:

$$A = IU\Delta t = I^2 R\Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta t .$$

Мощность тока равна

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Закон Фарадея для электролиза

$$m = K\Delta q = KI\Delta t ,$$

где k - электрохимический эквивалент вещества.

КПД электрической цепи

$$\eta = \frac{A_n}{A_3} 100\% ,$$

где A_n - работа тока на внешнем участке цепи,

A_3 - полная энергия, вырабатываемая источником тока

$$A_3 = \varepsilon \cdot q = \varepsilon \cdot I \cdot \Delta t.$$

3.5.2. Порядок решения задач на постоянный ток

1. Прочитав задачу, начертить схему электрической цепи, обозначив на ней все элементы цепи. Если по условию задачи происходят какие-либо изменения в цепи, то схему лучше нарисовать два раза.
2. Указать на рисунке все направления токов, обозначения сопротивлений всех участков. Разобраться в том, какие элементы цепи соединены параллельно, а какие - последовательно.
3. Используя законы постоянного тока, написать уравнения, связывающие между собой все характеристики данной цепи: токи, сопротивления, напряжения и ЭДС
4. Решить полученную систему уравнений.

3.5.3. Примеры решения задач

Пример 3.14

Вольфрамовая нить электрической лампочки при $t_1 = 20^0$С имеет сопротивление $R_1 = 35{,}8$ Ом. Какова будет температура t_2 нити лампочки, если при включении в сеть напряжением $U = 120$ В по нити идет ток

I = 0,33 А? Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha = 4{,}6 \cdot 16^{-3}$ К$^{-1}$.

Дано:
$t_1 = 20^0$С;
R_1 = 35,8 Ом;
U = 120 В;
I = 0,33 А;
$\alpha = 4{,}6\ 10^2$ К$^{-1}$

t_2 - ?

Решение

Учитывая температурную зависимость сопротивления проводника, имеем два выражения для сопротивления проводника при двух температурах t_1 и t_2: $R_1 = R_0\ (1 + \alpha t_1)$, $R_2 = R_0\ (1 + \alpha t_2)$, где R_0 – сопротивление проводника при $t = 0^0$С, а α - температурный коэффициент для вольфрама. Его значение задано.

Из этих уравнений находим:

$$R_2 = \frac{R_1}{1+\alpha t_1}\left(1+\alpha t_2\right), \text{ т.к. } R_0 = \frac{R_1}{1+\alpha t_1} \text{ и } R_0 = \frac{R_2}{1+\alpha t_2}.$$

С другой стороны, по закону Ома для участка цепи $R = \dfrac{U}{I}$.

После алгебраических преобразований имеем

$$t_2 = \frac{U\left(1+\alpha t_1\right) - IR_1}{\alpha R_1 I} \approx 2200^0 C.$$

Ответ: температура нити $t = 2000^0$С.

Пример 3.15

Имеются два одинаковых элемента с ЭДС E = 2 В и внутренним сопротивлением r = 0,3 Ом. Как надо соединить эти элементы (последовательно или параллельно), чтобы получить больший ток, если внешнее сопротивление: а) R = 0,20 м; б) R = 160 м. Найти ток в каждом из этих случаев.

Дано:
ε = 2 В;
r = 0,30 м;
а) R = 0,20 м;
б) R =160 м

l_1 - ? l_2 - ?
l_3 - ? l_4 - ?

Решение

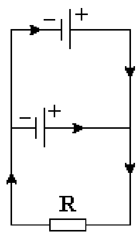
Источники соединены последовательно, поэтому их ЭДС складываются. Общее сопротивление источника будет равно $r + r = 2r$.

Запишем закон Ома для полной цепи в случае, когда источники тока соединены последовательно: $I = \dfrac{2\varepsilon}{R + 2r}$.

Тогда:

а) $I_1 = \dfrac{2 \cdot 2\,\text{В}}{0{,}2\,\text{Ом} + 2 \cdot 0{,}3\,\text{Ом}} = 5\,\text{А}$,

б) $I_2 = \dfrac{2 \cdot 2\,\text{В}}{16\,\text{Ом} + 2 \cdot 0{,}3\,\text{Ом}} = 0{,}24\,\text{А}$.



В случае, когда источники тока соединены параллельно, на концах, соединения мы получим разность потенциалов, равную ЭДС одного элемента ε; сопротивление полученного источника будет равно

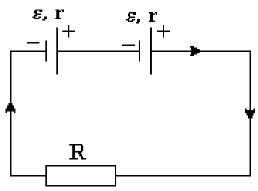
$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \Rightarrow r' = \frac{r}{2}.$$

Закон Ома имеет вид: $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r/2}$.

Тогда:

а) $I_3 = \dfrac{2\,\text{В}}{0{,}2\,\text{Ом} + 0{,}3\,\text{Ом}/2} = 5{,}7\,\text{А}$;

б) $I_4 = \dfrac{2\,\text{В}}{16\,\text{Ом} + 0{,}3\,\text{Ом}/2} = 0{,}12\,\text{А}$



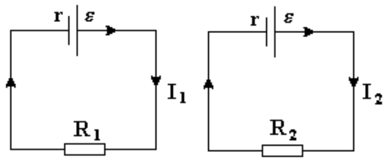
Ответ: при малом внешнем сопротивлении R элементы выгоднее соединять параллельно ($I_3 > I_4$), а при большом внешнем сопротивлении – последовательно ($I_2 > I_4$).

Пример 3.16

Элемент замыкают сначала на внешнее сопротивление $R_1 = 2$ Ом, а затем на внешнее сопротивление $R_2 = 0{,}5$ Ом. Найти ЭДС ε элемента и его внутреннее сопротивление r, если известно, что в каждом из этих случаев мощность, выделяющаяся во внешней цепи, одинакова и равна $P_1 = 2{,}54$ Вт.

Дано:
R_1 = 2 Ом;
R_2 = 0,5 Ом;
$P_1 = P_2$;
P_1 = 2,54 Вт

ε - ?
r - ?



Анализ и решение

Нарисуем схему цепи в двух случаях

В каждом из этих случаев можно написать закон Ома для замкнутой цепи и выражение для мощности, выделяемой на внешнем сопротивлении:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}, \qquad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r}.$$

Соответственно $P_1 = I_1^2 R_1$ и $P_2 = I_2^2 R_2$.

По условию они равны: $P_1 = P_2$ и $I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2$.

Подставим выражение для тока

$$\frac{\varepsilon^2}{(R_1 + r)^2} R_1 = \frac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2 + r)^2}.$$

Находим из этого уравнения внутреннее сопротивление источника

$r = \sqrt{R_1 R_2}$ $\qquad r = \sqrt{2 \cdot 0{,}5} = 1$ Ом

Вычислим ЭДС источника. Для этого выразим силу тока из формулы для мощности $I_1 = \sqrt{\dfrac{P}{R_1}}$ и подставим ее в закон Ома для замкнутой цепи

$$\sqrt{\frac{P}{R_1}} = \frac{\varepsilon}{(R_1 + r)}, \text{ тогда } \varepsilon = \sqrt{\frac{P}{R_1}} \cdot (R_1 + r).$$

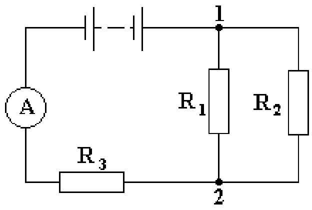
Ответ: источник имеет ЭДС ε = 3,38 В и внутреннее сопротивление r = 10 м.

Пример 3.17

ЭДС батареи ε = 120 В, сопротивление R_3 = 30 Ом, R_2 = 60 Ом. Схема цепи приведена на рисунке. Амперметр показывает ток I = 2 А. Найти мощность, выделяемую в сопротивлении R_1. Сопротивлением источника можно пренебречь.

Дано:
ε = 120 В;
R_3 = 30Ом;
R_2 = 60 Ом;
I = 2 А

P - ?



Мощность, выделяемая в сопротивлении R_1, равна $P = I_1^2 R_1 = \frac{U_{12}^2}{R_1}$.

Соединение сопротивлений R_1 и R_2 параллельное и U_{12} для обоих сопротивлений будет одинаково. Общее сопротивление этого участка будет равно

$$\frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} = R_{общ}.$$

Запишем закон Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R_3 + R_{общ}} = \frac{\varepsilon}{R_3 + \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2}}.$$

В этом уравнении неизвестно только сопротивление R_1. Найдем это сопротивление из уравнения

$$IR_3 + I\frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} = \varepsilon.$$

Получаем значение для сопротивления: R_1 = 60 Ом.

Падение напряжения U_{12} на участке с R_1 можно найти

$U_{12} = \varepsilon - I \cdot R_3$;

U_{12} = 120 - 2 · 30 = 60 В.

Вычислим мощность, выделяющуюся на сопротивлении R_1 Р = $60^2/60$ = 60 Вт.

Ответ: на сопротивлении R_1 выделяется мощность Р = 60 Вт.

3.5.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.17. Обмотка катушки из медной проволоки при t_1 = 14^{0}С имеет сопротивление R_1 = 10 Ом. После пропускания тока сопротивление обмотки стало равным R_2 = 12,2 Ом. До какой температуры t_2 нагрелась обмотка? Температурный коэффициент сопротивления меди $\alpha = 4{,}15 \cdot 10^3$ К$^{-1}$.

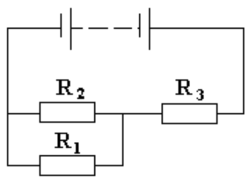
Ответ: t_2 = 70^{0}С.

Задача 3.18. Элемент с ЭДС ε = 1,6 В имеет внутреннее сопротивление r = 0,50 м. Найти КПД η элемента для тока в цепи l = 2,4 А.

Ответ: η = 25 %.

Задача 3.19. Два последовательно соединенных элемента с одинаковыми ЭДС $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ = 2В и внутренними сопротивлениями r_1 = 10 м и r_2 = 1,5 Ом замкнуты на внешнее сопротивление R = 0,5 Ом. Найти разность потенциалов U на зажимах каждого элемента.

Ответ: U_1 = 0,66 В;
U_2 = 0.



Задача 3.20. ЭДС батареи ε = 120 В, сопротивление R_1 = 25 Ом. $R_2 = R_3$ = 100 Ом. Найти мощность P_1, выделяющуюся на сопротивлении R_1. Соединение элементов цепи показано на рисунке.

Ответ: 16 Вт = P_1.

Задача 3.21. Два параллельно соединенных элемента с одинаковыми ЭДС $\varepsilon_1 = \varepsilon_1$ = 2 В и внутренними сопротивлениями r_1 = 1 Ом и r_2 = 2,5 Ом замкнуты на внешнее сопротивление R = 1,4 Ом. Найти ток в каждом из элементов и во всей цепи.

Ответ: I_1 = 0,6 А; I_2 = 0,4 А; I = 1 А.

3.6. Решение задач на законы Кирхгофа

При расчетах сложных электрических цепей применение закона Ома в любой форме бывает затруднено, поскольку на различных участках цепи текут различные токи. Кроме того, не всегда возможно четко выделить параллельные и последовательные участки в соединении проводников.

Решать такие задачи легче всего, применяя законы Кирхгофа.

3.6.1. Основные понятия и определения

Узлом в цепи называют точку соединения более двух проводников.

Первый закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} \pm I_i = 0$$

Токи, входящие в узел, считают положительными. Токи, выходящие из узла, считают отрицательными.

Второй закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма падений напряжений на всех участках замкнутой цепи равна алгебраической сумме ЭДС в этой же цепи

$$\sum_{K=1}^{m} I_K R_K = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \ .$$

3.6.2. Порядок решения задач на законы Кирхгофа

1. Нарисовать схему цепи. На рисунке показать направления токов на всех участках цепи. При этом надо учесть, что в узел токи не могут только входить или только выходить из узла. Это следует из первого закона Кирхгофа.

2. Выбрать замкнутые контуры обхода для применения второго закона Кирхгофа. Показать на рисунке направление обхода по контуру. Контуров может быть несколько.

3. Используя первый закон Кирхгофа, записать уравнения. Число уравнений, которые можно написать, используя первый закон, должно быть в два раза меньше, чем узлов в рассматриваемой схеме.

4. Воспользоваться вторым законом и записать такое число уравнений, чтобы число неизвестных величин равнялось числу уравнений. При этом надо учитывать следующее: падение напряжения на каждом участке записывается со знаком "+", если направление обхода по этому участку совпадает с направлением тока на нем. И наоборот, если обход совершался по этому сопротивлению обратно направлению тока, то ставится знак "-".

Знак у ЭДС ставится «+» тогда, когда направление обхода совпадает с направлением поля сторонних сил источника тока и наоборот.

Поле сторонних сил источника всегда направлено от отрицательного полюса к положительному.

5. Решить полученную систему уравнений и найти искомые величины.

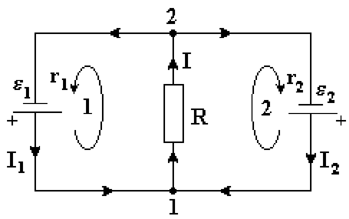
3.6.3. Примеры решения задач на законы Кирхгофа

__Пример 3.18__

Два элемента с одинаковыми ЭДС $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление R. Через элемент с ЭДС ε_1 - течет ток $I_1 = 1$ А.
Найти сопротивление R и ток I_2, текущий через элемент с ЭДС ε_2. Какой ток течет через сопротивление R. Схема соединения показана на рисунке.

Дано:
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ D;
$r_1 = 1$ Ом;
$r_2 = 2$ Ом;
$I_1 = 1$ А

+I_2 - ?
R - ? I - ?



Выберем направления токов на всех участках цепи. Видим, что в узлах 1 и 2 есть входящие и есть выходящие токи, значит, направления токов выбраны разумно.

Выберем контуры обхода и покажем направления обхода по ним.

Составим уравнение, используя первый закон Кирхгофа для первого узла:

$$I_1 + I_2 - I = 0.$$

Токи, входящие в узел, пишем со знаком "+", а входящие с "–". Всего можно написать одно уравнение, т.к. второе будет тождественно первому.

Воспользуемся вторым законом Кирхгофа. Запишем уравнение для первого контура обхода. Падение напряжения на всех участках 1-го контура напишем со знаком «+», т.к. направление обхода на этих участках совпадает с направлением тока

$$U_\Sigma = IR + I_1 r.$$

В этот контур входит только ЭДС ε_1, и направление обхода по контуру совпадает с направлением поля сторонних сил, т.к. силы этого поля направлены от отрицательного полюса к положительному.

Запишем уравнение

$$IR + I_1 r_1 = \varepsilon_1.$$

Для второго контура $U_2 = +I_2 r_2 + IR$. И ЭДС будет входить в уравнение также со знаком "+".

Запишем уравнение: $I_2 R_2 + IR = \varepsilon_2$.

Получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I; \\ IR + I_1 r_1 = \varepsilon_1; \\ IR + I_2 r_2 = \varepsilon_2. \end{cases}$$

Решая систему, получаем

$$I_2 = \frac{I_1 r_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{r_2} = 0{,}5\,\text{А}.$$

Полный ток через сопротивление R равен сумме токов

$$I = I_1 + I_2 = 1{,}5\ \text{А}.$$

Сопротивление R находим из одного из уравнений

$$R = \frac{2}{3}\,\text{Ом} = 0{,}66\,\text{Ом}.$$

Ответ: ток через второй источник равен $I_2 = 0{,}5$ А, суммарный ток $I = I_1 + I_2 = 1{,}5$ А

Внешнее сопротивление $R = 2/3$ Ом.

Пример 3.19

Два одинаковых элемента имеют ЭДС $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В и внутренние сопротивления $r_1 = l_2 = 0{,}5$ Ом.

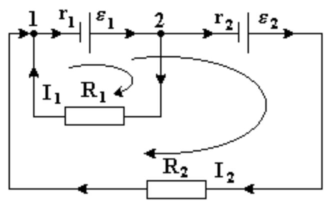
Найти токи I_1 и I_2, текущие через сопротивления $R_1 = 0{,}5$ Ом и $R_2 = 1{,}5$ Ом, а также ток I через элемент с ЭДС.

Схема изображена на рисунке.

Дано:

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В;
$r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом;
$R_1 = 0{,}5$ Ом;
$R_2 = 1{,}5$ Ом

I_1 - ?
I_2 - ?
I - ?



Выберем направления токов на всех участках. Запишем первый закон Кирхгофа для 1-го узла

$$I_2 + I_1 = I.$$

Выберем большой и малый контуры обхода. Для большого контура уравнение будет иметь вид:

$$Ir_1 + I_2r_2 + I_2R_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Для малого контура

$$Ir_1 + I_1R_1 = \varepsilon_1.$$

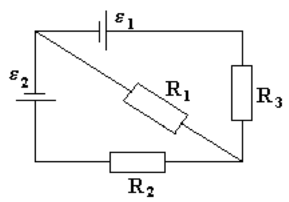
Получили три уравнения

$$\begin{cases} I_2 + I_1 = I; \\ Ir_1 + I_2r_2 + I_2R_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \\ Ir_1 + I_1R_1 = \varepsilon_1. \end{cases}$$

В эти уравнения входят три неизвестных величины I_1; I_2 и I. Решаем систему уравнений и находим

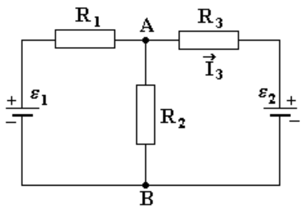
$$I_1 = 2{,}28 \text{ А}; \quad I_2 = 0{,}56 \text{ А}; \qquad I = I_1 + I_2 = 1{,}72 \text{ А}.$$

3.6.4. Задачи для самостоятельного решения

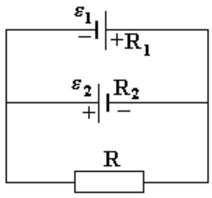


Задача 3.22 ЭДС элементов $\varepsilon_1 = 2{,}1$ В и $\varepsilon_2 = 1{,}9$ В, сопротивления $R_1 = 45$ Ом, $R_2 = 10$ Ом и $R_3 = 10$ Ом.

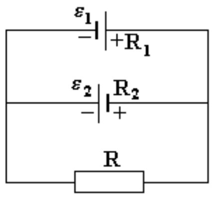
Найти токи на всех участках цепи.



Задача 3.23. Определить разность потенциалов между точками А и В , если ε_1 =8 В, ε_2 =6 В, R_1 = 4 Ом, R_2 = 6 Ом, R_3 + 8 Ом. Внутренними сопро тивлениями источников тока пренебречь.



Задача 3.24. Два источника тока с электродвижущими силами ε_1 = 12 В и ε_2 = 8 В и внутренними сопротивлениями R_1 = 4 Ом и R_2 = 2 Ом, а также проводник сопротивлением R = 20 Ом соединены, как показано на рис. 2. Определить силы тока в реостате и источниках тока.



Задача 3.25. Определить силу тока в каждом элементе и направление на режимах реостата (см. верхний рисунок), если ε_1 = 12 В, R_1 = 1 Ом, ε_2 = 6 В, R_2 = 1,5 Ом и R = 20 Ом.

Для заметок

Для заметок

ФИЗИКА: ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Составители Звездина Н.А.
Редактор Н.П. Кубыщенко

Подписано в печать 10.12.2006			Формат 60*84 1/16
Бумага типографская	Офсетная печать		Усл. печ. л. 2.65
Уч.–изд. л. 2.50	Тираж	Заказ	Цена

ООО «Издательство УМЦ УПИ»
Екатеринбург, пер. Автоматики, 4