Физика:

Колебания и волны

Модуль №5

Рабочая тетрадь

Екатеринбург 2006

УДК 373:53

Составители Л.Ф. Ромашева, А.Г. Андреева

Научный редактор проф., д-р физ.-мат. наук А.А. Повзнер

ФИЗИКА. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ.
МОДУЛЬ №5/ Составители Л.Ф. Ромашева, А.Г. Андреева.
Еватеринбург: ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2006, 65с.

Учебное пособие представляет собой сборник задач по разделу «Колебания и волны» курса общей физики, читаемого студентам УГТУ-УПИ. Пособие содержит примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. В пособии представлены основные физические соотношения, необходимые для решения задач. Кроме того, пособие содержит контрольные задания по данному разделу.

Данная рабочая тетрадь предназначена в первую очередь для студентов, обучающихся по дистанционной технологии. Пособие составлено в соответствии с программой курса «Общая физика» и может быть использовано студентами УГТУ-УПИ всех специальностей и всех форм обучения.

Подготовлено кафедрой физики

1. Список основных формул

Уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ или } x = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где x - смещение колеблющейся точки от положения равновесия,
A - амплитуда колебаний,
t – время,
ω_0 - циклическая частота,
φ_0 - начальная фаза колебаний,
$(\omega_0 t + \varphi\ )$ - фаза колебаний в момент t.

1. Циклическая частота колебаний

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0,$$

где T_0 и ν_0 - период и частота колебаний.

3. Скорость точки, совершающей гармонические колебания по закону $x = A \cdot cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,

$$\upsilon = \dot{x} = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\upsilon_m \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

4. Ускорение точки, при гармонических колебаниях

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0{}^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

5. Амплитуда A результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящих по одной прямой, определяется по формуле

$$A = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

где A_1 и A_2 – амплитуда составляющих колебаний,
φ_1 и φ_2 - их начальные фазы.

6. Начальная фаза результирующего колебания определяется из формулы

$$tg\varphi = \frac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}.$$

7. Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с амплитудами A_1 и A_2, начальными фазами φ_1 и φ_2 и равными частотами имеет вид

$$\frac{x^2}{A_1^{\ 2}}+\frac{y^2}{A_2^{\ 2}}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1).$$

8. Если начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний одинаковы, то уравнение траектории принимает вид

$$y=\frac{A_2}{A_1}\cdot x \quad \text{или}$$

9.

$$y=-\frac{A_2}{A_1}\cdot x,$$

т.е. точка движется по прямой.

10. В том случае, если разность фаз $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm\frac{\pi}{2}$, уравнение принимает вид

$$\frac{x^2}{A_1^{\ 2}}+\frac{y^2}{A_2^{\ 2}}=1,$$

т.е. точка движется по эллипсу.

11. Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mA^2\omega_0^{\ 2},$$

где m – ее масса,

k – коэффициент квазиупругой силы $\left(k=m\omega_0^{\ 2}\right)$.

12. Уравнение затухающих колебаний

$$x=A(t)\cdot\cos(\omega\ t+\varphi_0),$$

где $A(t)$ - амплитуда затухающих колебаний в момент t,

ω - их циклическая частота.

13.

$$A(t)=A_0\cdot e^{-\beta t},$$

где A_0 - амплитуда колебаний в момент $t=0$,

β - коэффициент затухания.

14.

$$\omega=\sqrt{\omega_0^{\ 2}-\beta^2}.$$

15. Логарифмический декремент затуханий

$$\lambda=ln\frac{A(t)}{A(t+T)},$$

где $A(t)$, $A(t+T)$ - амплитуда двух последовательных колебаний, отстающих по времени друг от друга на период.

16. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cdot \cos\omega t,$$

17.
$$\ddot{x} + 2\beta x + {\omega_0}^2 x = f_0 \cdot \cos\omega t,$$

где $\beta = \frac{r}{2m}$, ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$, $f_0 = \frac{F}{m}$.

18. Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = f_0 \Big/ \sqrt{\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}.$$

19. Резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\beta^2}.$$

20. Резонансная амплитуда

$$A_{\text{рез}} = f_0 \Big/ 2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

21. Уравнение гармонических колебаний заряда на обкладках конденсатора

$$q = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q_0 - амплитудное значение заряда,

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$;

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ - период колебаний (формула Томсона),

где L - индуктивность катушки,

C – емкость конденсатора.

22. Уравнение изменения со временем тока (i) в колебательном контуре

$$i = \dot{q} = -q_0\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = -i_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

23. Уравнение изменения со временем напряжения (u) на обкладках конденсатора

$$u = \frac{q}{c} = \frac{q_0}{c} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = u_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

24. Энергия магнитного ($W_\text{м}$) поля

$$W_{\text{м}} = \frac{Li^2}{2} = \frac{Li_0^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

25. Энергия электрического ($W_{\text{эл}}$) поля

$$W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

26. Полная энергия колебательного контура

$$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{м}} = W_{\text{эл.max}} = W_{\text{м.max}} = \frac{Li_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

27. Уравнение затухающих колебаний

$$q = q(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $q(t)$ - амплитуда затухающих колебаний в момент t,
ω - циклическая частота затухающих колебаний.

28. $$q(t) = q_0 \cdot e^{-\beta t}\ , \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

где q_0 - амплитуда колебаний в момент $t = 0$,
β - коэффициент затухания.

29. $$\beta = \frac{R}{2L}.$$

Если R (активное сопротивление контура) равно нулю, то β=0 и, следовательно, колебания будут незатухающими.

30. Если электрическая цепь содержит активное сопротивление R, емкость C и индуктивность L, то полное сопротивление цепи вычисляется так:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

31. При этом сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

32. Уравнение плоской волны

$$\xi(l,t) = A \cdot \cos\omega\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right),$$

где $\xi(l,t)$ - смещение точек среды с координатой l в момент времени t,
ω - циклическая частота,
υ – скорость распространения волны.

33. Длина волны λ связана с периодом T колебаний и циклической частотой ω соотношениями

$$\lambda = \upsilon T, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

34. Разность фаз колебаний двух точек среды, расстояние между которыми равно Δx

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot \Delta x}{\lambda}.$$

35. Уравнение стоячей волны

$$\xi(x,t) = 2A \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos\omega t = 2A \cdot \cos kx \cdot \cos\omega t,$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

2. Незатухающие механические и электромагнитные колебания. Сложение колебаний

2.1. Примеры решения задач

Пример 1

Материальная точка массой m = 10 г совершает гармонические колебания по закону синуса с периодом T = 2 с и начальной фазой, равной нулю. Полная энергия колеблющейся точки W = 0,1 мДж.

Найти: 1) амплитуду колебаний; 2) написать уравнение данных колебаний; 3) найти наибольшее значение силы F_{max}, действующей на точку.

Дано:
m = 10 г = 0,01 кг
T = 2 с
W = 0,1 мДж = $0{,}1\text{x}10^{-3}$ Дж

A - ?
F_{max} - ?

Решение: Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

По условию задачи начальная фаза равна нулю, следовательно

$$x = A \cdot \sin \omega_0 t.$$

Взяв первую производную смещения по времени, найдем скорость колеблющейся точки

$$\upsilon = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cdot \cos \omega_0 t.$$

Кинетическая энергия колеблющейся точки

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t}{2}$$

Полная энергия колеблющейся точки равна максимальному значению ее кинетической энергии

$$W = W_{к\max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

Отсюда находим следующее выражение для амплитуды колебаний

$$A = \frac{1}{\omega_0} \cdot \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

Циклическая частота связана с периодом колебаний соотношением

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Подставляя его в выражение для амплитуды, получаем

$$A = \frac{T_0}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2W}{m}},$$

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3{,}14} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3}}{0{,}01}} = 0{,}045 \text{ м}.$$

Найдем численное значение частоты

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad \omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi\, c^{-1}.$$

Запишем уравнение гармонических колебаний для данной точки

$$x = 0{,}045 \cdot \sin \pi t \text{, м}$$

Согласно второму закону Ньютона

$$F = ma \qquad (1)$$

Ускорение колеблющейся точки найдем, взяв вторую производную смещения по времени (или, что то же самое, первую производную от скорости по времени)

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cdot \sin \omega_0 t$$

Отсюда максимальное ускорение

$$a_{max} = A\omega_0^2.$$

Подставив это выражение максимального ускорения в соотношение (1), найдем максимальную силу, действующую на точку,

$$F_{max} = m \cdot A \cdot \omega_0^2.$$

Произведем вычисления

$$F_{max} = 0{,}01 \cdot 0{,}045 \cdot 3{,}14^2 = 4{,}44 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

Ответ: $A = 0{,}045$ м; $x = 0{,}045 \sin \pi t$, м; $F_{max} = 4{,}44$ мН.

Пример 2

Написать уравнение гармонического колебательного движения, происходящего по закону синуса, если максимальное ускорение точки $a_{max} = 49{,}3$ см/с^2, период колебаний $T = 2$ с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени $x_0 = 25$ мм.

Дано:
$a_{max} = 49.3$ см/с^2
$T = 2$ с
$x_0 = 25$ мм

Уравнение г.к.- ?

Решение: Смещение точки изменяется с течением времени по закону

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

1). Зная период колебаний, находим циклическую частоту

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ с}^{-1}.$$

2). Найдем, как изменяется с течением времени ускорение материальной точки. Для этого надо установить зависимость скорости точки от времени, а затем продифференцировать эту зависимость по времени

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{, а}$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Ускорение будет максимальным при $\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \pm 1$.

Таким образом, $a_{max} = A\omega_0^2$,откуда следует, что

$$A = \frac{a_{max}}{\omega_0^2} = \frac{49{,}3}{\pi^2} = 5 \text{ см.}$$

3). Начальную фазу φ_0 найдем из условия, что в начальный момент времени $(t=0)$ смещение от положения равновесия $x_0 = 25$ мм:

$$x_0 = A\sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi_0),$$

$x_0 = A\sin\varphi_0$, откуда находим, что

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{x_0}{A} = \arcsin\frac{25}{50} = \arcsin\frac{1}{2},$$

т.е. $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$

Подставив полученные значения амплитуды, циклической частоты и начальной фазы в уравнение колебаний, получим искомое уравнение гармонического колебания

$$x = 5\sin(\pi t + \frac{\pi}{6}), \text{ см.}$$

<u>Ответ:</u> $x = 5\sin(\pi t + \dfrac{\pi}{6})$, см.

<u>Пример 3</u>

Найти отношение кинетической энергии $W_к$ точки, совершающей гармонические колебания по закону синуса к ее потенциальной энергии W_p для моментов времени $t = \dfrac{T}{12}$. Начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0$.

Дано:	Решение:
$\varphi_0 = 0$ $t = \dfrac{T}{12}$ $\dfrac{W_к}{W_p} - ?$	<u>Решение:</u> Так как начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0$, то уравнение смещения точки от положения равновесия примет вид

$$x = A\sin\omega_0 t.$$

Тогда скорость точки изменяется по закону

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\cdot\omega_0\cos\omega_0 t.$$

Кинетическая энергия точки $W_к$ равна

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\cdot A^2\omega_0^2\cos^2\omega_0 t}{2},$$

а потенциальная энергия точки, совершающей гармонические колебания, вычисляется по формуле

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k\cdot A^2\sin^2\omega_0 t}{2}.$$

Тогда $$\frac{W_к}{W_p} = \frac{m\omega_0^2\cos^2\omega_0 t}{k\sin^2\omega_0 t} = \frac{m\omega_0^2}{k}\mathrm{ctg}^2\omega_0 t.$$

Так как $k = m\omega_0^2$, то получаем, что

$$\frac{W_к}{W_p} = \mathrm{ctg}^2\omega_0 t = \mathrm{ctg}^2(\frac{2\pi}{T}\cdot t).$$

Найдем отношение $\frac{W_к}{W_p}$ для момента времени $t = \frac{T}{12}$:

$$\frac{W_к}{W_p} = ctg^2(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{12}) = ctg^2\frac{\pi}{6} = 3$$

Ответ: $\frac{W_к}{W_p} = 3$.

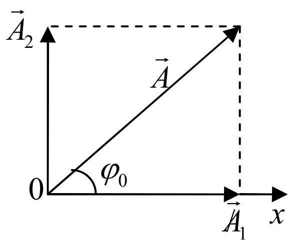
Пример 4

Найти амплитуду A и начальную фазу φ_0 гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1 = 4\cos\pi t$ см и $x_2 = 3\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$ см. Написать уравнение результирующего колебания. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд.

Дано:	
$x_1 = 4\cos\pi t$ см $x_2 = 3\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$ см	
Уравнение гармонических колебаний - ?	

Решение: Так как складываются два одинаково направленных гармонических колебания одинаковой частоты $\omega_{0_1} = \omega_{0_2} = \pi$ с$^{-1}$, то результирующее колебание будет иметь ту же частоту: $\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$.

Амплитуду A и начальную фазы результирующего колебания найдем с помощью метода векторных диаграмм. Для этого изобразим графически оба складываемых колебания на векторной диаграмме (см. рисунок).



Напомним, что для изображения колебания, уравнение которого $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, методом векторных диаграмм необходимо из произвольной точки O, выбранной на оси Ox, отложить вектор $\vec{A}$, длина которого равна амплитуде колебания, причем угол между вектором $\vec{A}$ и осью Ox должен быть равен начальной фазе φ_0 колебания.

В нашей задаче начальная фаза первого колебания $\varphi_{0_1} = 0$, поэтому вектор $\vec{A}_1$ откладывается вдоль оси Ox, причем его длина $\left|\vec{A}_1\right| = 4$ см.

Так как $\varphi_{0_2} = \frac{\pi}{2}$, то вектор $\vec{A}_2$ откладывается перпендикулярно оси Ox и его длина равна $\left|\vec{A}_2\right| = 3$ см. Амплитуда результирующего колебания $\vec{A}$ равна $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$.

Величину амплитуды найдем по теореме Пифагора

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{16+9} = 5\,\text{см}.$$

Из рисунка видно, что $\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow$ начальная фаза φ_0 равна

$$\varphi_0 = \frac{A_2}{A_1} = \mathrm{arctg}\frac{3}{4} \approx 36{,}87^0 = \frac{\pi}{5}\ \text{рад}.$$

Таким образом, уравнение результирующего колебания будет иметь вид $x = 5\cos(\pi t + \frac{\pi}{5})$ см.

<u>Ответ:</u> $x = 5\cos(\pi t + \frac{\pi}{5})$ см.

<u>Пример 5</u>

Складываются два колебания одинакового направления, выражаемых уравнениями $x_1=A_1\cos\omega(t+\tau_1)$, $x_2=A_2\cos\omega(t+\tau_2)$ где, A_1=1см, A_2=2см, $\tau_1=\frac{1}{6}$ с, $\tau_2=\frac{1}{2}$ с, $\omega=\pi$ с$^{-1}$. Определить начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний, найти амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Написать уравнение результирующего колебания.

Дано:
$x_1=A_1\cos\omega(t+\tau_1)$
$x_2=A_2\cos\omega(t+\tau_2)$
A_1=1см
A_2=2см
$\tau_1 = \frac{1}{6}c$
$\tau_2 = \frac{1}{2}c$
$\omega=\pi$ с$^{-1}$

$\varphi_1 = ?$ $\varphi_2 = ?$
$A = ?$ $\varphi = ?$
Уравнение результирующего колебания - ?

<u>Решение:</u> Уравнение гармонического колебания имеет вид:

$$x = A\cdot\cos\omega(t+\tau).$$

Преобразуем уравнения, заданные в условия задачи, к такому же виду: $x_1 = A_1\cdot\cos(\omega t + \omega\tau_1)$, (1)

$$x_2 = A_2\cdot\cos(\omega t + \omega\tau_2) \quad (2)$$

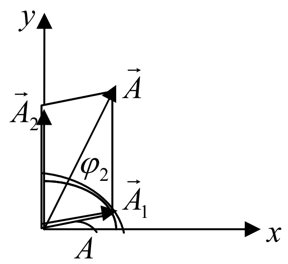
Из сравнения выражений (2) с равенством (1) находим начальные фазы первого и второго колебаний:

$$\varphi_1 = \omega\tau_1 = \frac{\pi}{6}\ \text{рад};$$

$$\varphi_2 = \omega\tau_2 = \frac{\pi}{2}\ \text{рад}.$$

Для определения амплитуд A и начальной фазы φ результирующего колебания воспользуемся методом векторных диаграмм.

На рисунке построена векторная диаграмма по данным задачи



Согласно теореме косинусов амплитуда результирующего колебания определяется соотношением

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (3)$$

Подставив значения A_1, A_2 и $(\varphi_2 - \varphi_1)$ в соотношение (3), произведем вычисления

$$A = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})} = 2{,}65\,\text{см}.$$

Тангенс начальной фазы φ результирующего колебания определим по соотношению

$$tg\varphi = \frac{A_1\cdot\sin\varphi_1 + A_2\cdot\sin\varphi_2}{A_1\cdot\cos\varphi_1 + A_2\cdot\cos\varphi_2},$$

откуда начальная фаза

$$\varphi = arctg\frac{A_1\cdot\sin\varphi_1 + A_2\cdot\sin\varphi_2}{A_1\cdot\cos\varphi_1 + A_2\cdot\cos\varphi_2}.$$

Подставив значения $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ произведем вычисления

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{1\cdot\sin\frac{\pi}{6} + 2\cdot\sin\frac{\pi}{2}}{1\cdot\cos\frac{\pi}{6} + 2\cdot\cos\frac{\pi}{2}} = \mathrm{arctg}(\frac{5}{\sqrt{3}}) = 70{,}9^0 = 0{,}394\pi.$$

Так как циклические частоты складываемых колебаний одинаковы, то результирующее колебание будет иметь ту же частоту ω. Это позволяет написать уравнение результирующего колебания в виде.

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (4)$$

где $A = 2{,}65 см$, $\omega = \pi\ c^{-1}$, $\varphi = 0{,}394\pi$ рад.

Подставляя значения A, ω и φ в (4), получаем уравнение результирующего колебания

$$x = 2{,}65\cdot\cos(\pi t + 0{,}394\pi),\ \text{см}.$$

Ответ: $x = 2{,}65\cdot\cos(\pi t + 0{,}394\pi), \text{см}.$

Пример 6

Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, заданных уравнениями: $x = A_1\cos\omega t$ и $y = A_2\cos(\omega t + \varphi)$, где $A_1 = 1\,\text{см}$, $A_2 = 2\,\text{см}, \varphi = \pi$. Найти уравнение траектории точки и построить ее с соблюдением масштаба.

Дано:
$x = A_1\cos\omega t$
$y = A_2\cos(\omega t + \varphi)$
$A_2 = 2\,\text{см}$
$\varphi = \pi$

$y(x) - ?$

Решение: Уравнение траектории результирующего движения точки, получающего при сложении взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами, имеет вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

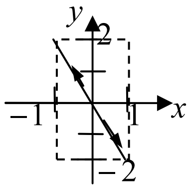
В данном случае $\varphi_1 = 0; \varphi_2 = \pi$, поэтому $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi$.

Подставляя это значение в предыдущее уравнение, имеем $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}=0;$

$$\left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0, \qquad \frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}=0,$$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x; \qquad y=-2x.$$

Видно, что траекторией результирующего движения в данном случае является прямая. Построим ее с соблюдения масштаба.



Стрелками указаны направления движения точки по траектории.
Ответ: $y=-2x$

Пример 7
Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых $x=A\cos\omega t$ и $y=A\cos 2\omega t$, где $A=2$ см, $\omega=\pi\ c^{-1}$. Найти уравнение траектории точки и построить ее с соблюдением масштаба.

Дано:	Решение: Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время t из заданных уравнений. Для этого воспользуемся формулой $\cos 2\omega t=\cos^2\omega t-\sin^2\omega t$.
$x=A\cos\omega t$ $y=A\cos 2\omega t$ $A=2$ см $\omega=\pi$ с$^{-1}$	В данном случае
$y(x)-?$	

$$\cos\omega t=\frac{x}{A},$$

$$\sin\omega t=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}$$

$$\frac{y}{A}=cos\, 2\omega t; \qquad \frac{y}{A}=\frac{x^2}{A^2}-\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right);\ \text{отсюда}$$

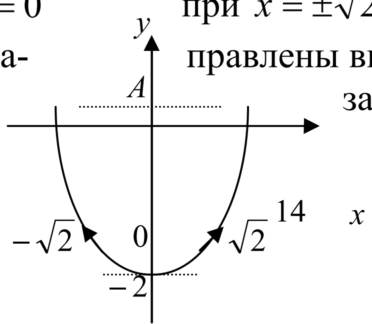
$$y=\frac{2}{A}x^2-A$$ - это уравнение параболы.

Подставим $A=2$: $y=x^2-2$

Построим по точкам: $y=-2$ при $x=0$, $x=0$,

$y=0$ при $x=\pm\sqrt{2}$,

ветви параболы направлены вверх.
Стрелками указано направление движения точки.



Ответ: $y = \frac{2}{A}x^2 - A$.

Пример 8

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 0,025 мкФ и катушки с индуктивностью 1,015 Гн. Омическим сопротивлением цепи пренебречь. На обкладках конденсатора находится заряд $q_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл.

1). Написать для данного контура уравнения (с числовыми коэффициентами) законы изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора и силы тока в цепи от времени.

2). Найти значения разности потенциалов на обкладках конденсатора и силы тока в цепи в момент времени $\frac{T}{4}$ и $\frac{T}{2}$

Дано:
$C = 0{,}025 \cdot 10^{-6}$ Ф
$L = 1{,}015$ Гн
$R = 0$
$q_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл

Уравнение?
$U(t) = ?$
$i(t) = ?$
$t_1 = \frac{T}{4}$, $t_2 = \frac{T}{2}$

Решение: Уравнение изменения заряда на обкладках конденсатора со временем имеет вид

$$q = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Начальная фаза колебаний равна нулю, следовательно,

$$q = q_0 \cdot \cos \omega_0 t$$

Изменение направления на обкладках конденсатора задается уравнением

$$U(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cdot \cos \omega_0 t = U_0 \cdot \cos \omega_0 t,$$

ω_0 - циклическая частота собственных колебаний в контуре,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

где T_0 – период собственных колебаний

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{LC}$$

Следовательно, $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Чтобы записать с числовыми коэффициентами уравнение изменения разности потенциалов, произведем вычисления:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1{,}015 \cdot 0{,}025 \cdot 10^{-6}}} = 6277{,}65\text{с}^{-1} = 2000\pi\,\text{с}^{-1};$$

$$U_0 = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-6}}{0{,}025 \cdot 10^{-6}} = 100\,\text{В}.$$

Таким образом, получаем уравнение в виде

$$U(t) = 100 \cdot \cos 2000\pi t, \text{В}.$$

Изменение силы тока со временем задается уравнением

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(q_0 \cos\omega_0 t) =$$

$$= -q_0\omega_0 \sin\omega_0 t = -i_0 \cdot \sin\omega_0 t,$$

где i_0 - амплитудное значение силы тока. Рассчитаем эту величину

$$i_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 6277 = 15{,}7 \cdot 10^{-3}\,\text{А}.$$

Окончательно получаем уравнение

$$i(t) = -15{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot \sin 2000\pi t\,, \text{А}.$$

Получаем значение разности потенциалов, и силы тока в цепи в момент времени $t_1 = \frac{T}{4}$:

$$U_1 = U_0 \cdot \cos\omega_0 t_1 = U_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) =$$

$$= U_0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0; \qquad U_1 = 0$$

$$i_1 = -i_0 \cdot \sin\omega_0 t_1 = -i_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) =$$

$$= -i_0 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -i_0;$$

$$i_1 = -15{,}7 \cdot 10^{-3}\,\text{À}$$

Аналогично для момента времени $t_2 = \frac{T}{2}$:

$$U_2 = U_0 \cdot \cos\omega_0 t_2 = U_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) =$$

$$= U_0 \cdot \cos\pi = -U_0; \qquad U_2 = -100\text{В}.$$

$$i_2 = -i_0 \cdot \sin\omega_0 t_2 = -i_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) =$$

$$= -i_0 \cdot \sin\pi = 0, \qquad t_2 = 0$$

Ответ: $U(t) = 100 \cdot \cos 2000\pi t$, В; $i(t) = -15{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot \sin 2000\pi t$,А; $U_1 = 0$; $i_1 = -15{,}7 \cdot 10^{-3}$ А; $U_2 = -100$В; $i_2 = 0$.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

1.* Точка совершает гармонические колебания по закону синуса. Период колебаний $T = 2c$, амплитуда $A = 50$ мм, начальная фаза $\varphi = 0$. Найти скорость υ точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия $x = 25$ мм.

$$(\upsilon = 13{,}6 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}})$$

2. Определить максимальное значение скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 3$ см и угловой частотой $\omega = \frac{\pi}{2} c^{-1}$.

$$(\upsilon_{\max} = 4{,}71 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}};\, a_{\max} = 7{,}40 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2})$$

3. Колебания материальной точки происходят согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где $A = 8$ см, $\omega = \frac{\pi}{6} c^{-1}$. В момент, когда возвращающая сила достигла значения – 5 мН, потенциальная энергия E_n стала равной 100 мкДж. Найти этот момент времени и соответствующую ему фазу колебаний.

$$(t = 2\text{с};\, \varphi = \frac{\pi}{3})$$

4. К спиральной пружине подвесили грузик, в результате чего пружина растянулась на $x = 9$ см. Каков будет период T колебаний грузика, если его немного оттянуть вниз и затем отпустить?

$$(T = 0{,}6\text{с})$$

5. Потенциальная энергия частицы, совершающей гармонические колебания вдоль оси Ox по закону косинуса, в момент времени t больше ее кинетической энергии в $n = \frac{W_p}{W_к}$ раза. Найти $\beta = \frac{x}{A} = 3$ – отношение координаты частицы к амплитуде ее колебаний в этот момент времени.

$$(\beta = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

6. Колебания точки происходят по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени смещение x точки равно 5 см, ее скорость $\upsilon = 20$ см/с и ускорение $a = -80$ см/с^2. Найти амплитуду A, угловую частоту ω, период колебаний T и фазу $\varphi = (\omega t + \varphi_0)$ в рассматриваемый момент времени.

$$(A = 7{,}07\text{см};\, \omega = 4\text{с}^{-1};\, T = 1{,}57\text{с};\, \varphi = \frac{\pi}{4}\text{рад})$$

7. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1{,}5$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = 2 см$. Начальные фазы колебаний $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ рад и $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ рад. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Найти его уравнение и построить с соблюдением масштаба векторную диаграмму сложения амплитуд.

($A_{рез} = 3{,}86 \cdot 10^{-2}; \varphi_0 = 0{,}417\pi$ рад)

8. Складываются три гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = T_3 = 2$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = A_3 = 3$ см. Начальные фазы колебаний $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}, \varphi_3 = \frac{2\pi}{3}$. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд. Определить из чертежа амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Написать его уравнение.

($A = 6 \cdot 10^{-2}$ м; $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ рад)

9. Складываются два гармонических колебания одинаковой частоты и одинокого направления: $x_1 = 1 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$ см и $x_2 = 2 \cdot \cos(\omega t + \frac{5\pi}{6})$ см. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд. Определить амплитуду и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Написать уравнение результирующего колебания.

($A = 2{,}24$см; $\varphi = 0{,}686\pi$ рад)

10. Материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1 \cos\omega t$ и $y = -A_2 \cos 2\omega t$, где $A_1 = 2$ см, $A_2 = 5$ см. Найти уравнение траектории и построить траекторию, показав направление движения точки.

($y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$)

11. Движение точки задано уравнениями $y = A_1 \cos\omega t$ и $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A_1 = 10$ см, $A_2 = 5$ см, $\omega = 2c^{-1}$; $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ рад. Найти уравнение траектории и построить ее, указав направление движения точки.

($\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$)

12. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания, выражаемые уравнениями $x = A_1 \sin\omega t$ и $y = A_2 \cos\omega(t + \tau)$, где A_1=2см, A_2=1см,

$\omega = \pi$ с$^{-1}$, $\tau = 0{,}5$ с. Найти уравнение движения и построить траекторию, показав направление движения точки.

($y = -\frac{1}{2}x$)

13. Электроемкость идеального электрического колебательного контура $C = 0{,}1$ нФ. В момент времени t_0 конденсатор был не заряжен, а в катушке индуктивности мгновенно индуцировали ток силой $i_m = 62{,}8$ мА, после чего контур предоставили самому себе. В контуре начались незатухающие электромагнитные колебания с периодом $T = 1$ мкс. Полагая, что колебания заряда конденсатора происходят по закону косинуса, найти: индуктивность контура L; начальную фазу φ_0 колебаний; момент времени t, ближайший к начальному t_0, когда сила тока в контуре впервые после начала колебаний уменьшаются до значения $I = 30$ мА.

(L=0,25 мГн; $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ рад; $t_1 = 79{,}3$ нс)

14. Катушка с индуктивностью $L = 30$ мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $S = 0{,}01$ м^2 и расстоянием между ними $d = 0{,}1$ мм. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинками, если контур настроен на частоту $\nu = 4{,}10^5$ Гц.

($\varepsilon = 6$)

15.* Уравнение изменения тока со временем в колебательном контуре имеет вид $i = -0{,}02\sin 400\pi t, A$. Индуктивность контура $L = 1$ Гн. Найти период колебаний T_0, емкость C контура, максимальную энергию $W_м$ магнитного поля и максимальную энергию $W_{эл}$ электрического поля.

($T = 5\cdot 10^{-3}$ с; $C = 0{,}63$ мкФ; $U = 25{,}2$ В; $(W_м)_{\max} = (W_{эл})_{\max} = 0{,}2$ мДж)

16.* Найти отношение энергии $W_м / W_{эл}$ магнитно поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени T/8.

($W_м/W_{эл}$=1)

17. Уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид $U = 50\cos 10^4 \pi t$, В. Емкость конденсатора $C = 0{,}1$ мкФ. Найти период T колебаний, индуктивность L контура, закон изменения со временем t тока i в цепи.

($T = 0{,}2\cdot 10^{-3}$ с; $L = 10{,}15$ мГн; $i = -157\sin 10^4 \pi t$ мА)

18. В момент времени $t_0 = 0$ конденсатор идеального электрического колебательного контура заряжают до амплитудного значения q_m, после чего контур предоставляют самому себе. Найти через какое время t_1 после начала колебаний энергия $W_{эл}$ электрического поля конденсатора уменьшится на $n = 75\%$, если период колебаний в контуре $T = 6$ мкс. Какую долю $\frac{W_{м1}}{W}$ от полной энергии составит энергия магнитного поля в момент времени t_1?

($t_1 = 1$ мкс, $\frac{W_{м1}}{W} = \frac{3}{4}$)

3. Затухающие механические и электромагнитные колебания

3.1. Примеры решения задач

Пример 1

Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время $t_1 = 1$ мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз уменьшится амплитуда за время $t_2 = 3$ мин?

Дано:

$t_1 = 1$ мин

$\dfrac{A(t)}{A(t+t_1)} = 2$

$t_2 = 3$ мин

$\dfrac{A(t)}{A(t+t_2)} - ?$

Решение. Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени по закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t},$$

где $A(t)$ – амплитуда в момент времени t;

A_0 - амплитуда колебаний в начальный момент времени;

β - коэффициент затухания.

Тогда

$$\frac{A(t)}{A(t+t_1)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t(t+t_1)}} = e^{-\beta t} \text{ и}$$

$$\frac{A(t)}{A(t+t_2)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t(t+t_2)}} = e^{\beta t_2}.$$

Прологарифмировав оба уравнения, выразим из каждого уравнения коэффициент затухания β:

$$\beta = \frac{1}{t_1} ln \frac{A(t)}{A(t+t_1)} \text{ и } \beta = \frac{1}{t_2} ln \frac{A(t)}{A(t+t_2)}.$$

Приравнивая правые части полученных выражений, находим, что $ln \dfrac{A(t)}{A(t+t_2)} = \dfrac{t_2}{t_1} ln \dfrac{A(t)}{A(t+t_1)}$, откуда следует, что

$$\frac{A(t)}{A(t+t_2)} = \left(\frac{A(t)}{A(t+t_1)}\right)^{\frac{t_2}{t_1}}.$$

$$\frac{A(t)}{A(t+t_2)} = 2^{3/1} = 8.$$

Ответ: $\dfrac{A(t)}{A(t+t_{12})} = 8$.

Пример 2.

Гиря массой $m = 0{,}50$ кг подвешена к пружине, жесткость которой $k = 32{,}0$ Н/м, и совершает затухающие колебания. Определить их период T в двух случаях: 1) за время, в течении которого произошло $n_1 = 88$ колебаний, амплитуда уменьшилась в $N_1 = 2{,}00$ раза; 2) за время двух колебаний ($n_2 = 2$) амплитуда колебаний уменьшилась в N_2= 20 раз.

Дано:	Решение:
$m = 0{,}50$ кг $k = 32{,}0$ Н/м $n_1 = 88$ $N_1 = 2{,}00$ $n_2 = 2$ $N_2 = 20$	Сопротивление среды уменьшает частоту свободных колебаний. Период затухающих колебаний определяется по соотношению
$T_1 - ?$ $T_2 - ?$	

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Циклическую частоту собственных колебаний ω_0 определим по соотношению

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Коэффициент затухания вычислим по формуле

$$\beta = \frac{\lambda}{T}.$$

Чтобы найти величину λ, обратимся к уравнению затухающих колебаний

$$x = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Уменьшающуюся со временем амплитуду выразим так:

$$x = A_0 \cdot e^{-\beta t} = A_0 \cdot e^{\frac{-\lambda t}{T}}.$$

Пользуясь введенными в условии задачи обозначениями, можно записать

$$\frac{A_0}{A} = N, \qquad \frac{t}{T} = n.$$

Тогда

$$\frac{A_0}{A} = e^{\frac{\lambda t}{T}} = e^{\lambda n} = N.$$

Отсюда, логарифмируя, имеем

$$\lambda = \frac{ln\,N}{n}.$$

Подставив численные значения N и n для двух случаев, получим:

$$T^2 \cdot \omega_0^2 = 4\pi^2 + \lambda^2.$$

$$\lambda_2 = \frac{ln\,20}{2} 1{,}5;$$

$$\omega_0 = \frac{32}{0{,}5} = 8{,}0 \text{ с}^{-1}.$$

Теперь запишем формулу для периода колебаний T с учетом выражения для β

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{T^2}}}.$$

Получилось квадратное уравнение относительно T. Решая его, находим (отбросив, отрицательный корень)

$$\Delta t = \frac{\sqrt{\frac{l}{g}\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}}{2\lambda} \cdot \ln k .$$

Приступая к вычислениям периода, заметим, что в первом случае $\lambda_1^2 << 4\pi$. Поэтому, сохраняя достаточную точность вычислений, можно пренебречь слагаемым λ_1^2, тогда

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} .$$

Во втором случае величину λ^2 отбросить нельзя.

Произведем вычисления:

$$T_1 = \frac{2\pi}{8{,}0} = 0{,}78\,\text{с};$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{4x^2 + 1{,}5^2}}{8{,}0} = 0{,}81\,\text{с}.$$

Ответ: $T_1 = 0{,}78\,\text{с}$, $T_2 = 0{,}81\,\text{с}$.

Пример 3*

Математический маятник длиной $l = 24{,}7$ см совершает затухающие колебания. Через какое время Δt энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза? Задачу решить при значении логарифмического декремента затухания:
а) $\lambda = 0{,}01$; б) $\lambda = 0{,}1$.

Дано:
$l = 24{,}7$ см $= 24{,}7 \cdot 10^{-2}$ м
$\frac{W(t)}{W(t+\Delta t)} = k = 9{,}4$
а) $\lambda = 0{,}01$;
б) $\lambda = 0{,}1$.

Δt -?

Решение. Полная энергия маятника, совершающего затухающие колебания, уменьшается с течением времени по закону

$$W(t) = \frac{m\omega^2 A^2 t)}{2},$$

где m – масса маятника;

ω - частота затухающих колебаний;

$A(t)$ - амплитуда маятника в момент времени.

Тогда отношение энергии маятника $W(t)$ в момент времени t к энергии маятника $W(t+\Delta t)$ в момент времени равно

$$\frac{W(t)}{W(t+\Delta t)} = \frac{A^2(t)}{A^2(t+\Delta t)} = \frac{(A_0 e^{-\beta t})^2}{(A_0 e^{-\beta(t+\Delta t)})^2} = e^{2\beta\Delta t}.$$

Так как $\frac{W(t)}{W(t+\Delta t)} = k$ - по условию, то

$$e^{2\beta\Delta t} = k.$$

Коэффициент затухания β связан с логарифмическим декрементом затухания λ соотношением

$$\beta = \frac{\lambda}{T},$$

где T – период затухающих колебаний.

Таким образом,

$e^{2\lambda\frac{\Delta t}{T}} = k$, откуда следует, что

$$\Delta t = \frac{T \ln k}{2\lambda}. \qquad (1)$$

Период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$,

где ω_0 – частота собственных колебаний маятника.

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{T^2}}},$$

$$T^2 \cdot \omega_0^2 = 4\pi^2 + \lambda^2.$$

Таким образом, период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}{\omega_0} = \sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1) для определения времени, получим

$$\Delta t = \frac{\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}{2\lambda} \cdot \ln k. \qquad (3)$$

а) $\lambda = 0{,}01$.

Так как $\lambda^2 << 4\pi^2$, то слагаемым λ^2 в формуле (3) можно пренебречь. Следовательно,

$$\Delta l \approx \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\lambda} \cdot \ln k = \frac{2\pi\sqrt{\frac{24{,}7 \cdot 10^{-2}}{9{,}8}}}{20{,}01} = \ln 9{,}4 = 112c;$$

б) $\lambda = 1$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{\frac{24{,}7 \cdot 10^{-2}}{9{,}8}}\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2 \cdot 1} \ln 9{,}4 = 1{,}13c.$$

<u>Ответ:</u> а) λ=0,01, Δt=112 с; б) $\lambda = 1$, $\Delta t = 1{,}13$ с.

<u>Пример 4*</u>

К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на $\Delta l = 9{,}8$ см. Оттягивая этот груз и опуская его, заставляют груз совершать колебания. Каким должен быть коэффициент затухания β, чтобы: а) колебания прекратились через время $t = 10$ с (считать условно, что колебания прекратились, если их амплитуда упала до 1% от начальной); б) груз возвращался в положение равновесия апериодически; в) логарифмический декремент затухания колебаний был $\lambda = 6$?

Дано:	Решение:
$\Delta l = 9{,}8$ см $=$ $9{,}8 \cdot 10^{-2}$ м	а) $\dfrac{A(t)}{A_0} = \dfrac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0} = 0{,}01,$
а) $A(t) = 0{,}01 A_0$	$\beta = -\dfrac{\ln 0{,}01}{t} = -\dfrac{\ln 0{,}01}{10} = 0{,}46 c^{-1};$
$t = 10$с	
б) $\omega = 0$	б) при возвращении груза в положение равновесия апериодически частота затухающих колебаний становится равной нулю:
в) $\lambda = 6$	
β - ?	

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0.$$

Следовательно, $\beta = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}},$

где ω_0 – частота собственных колебаний груза на пружине;

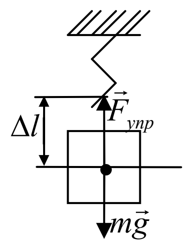
k - жесткость пружины;

m - масса груза.

В состоянии равновесия на груз действует две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, причем

$$\left| m\vec{g} \right| = \left| \vec{F}_{\text{упр}} \right|,$$

$mg = k \Delta l$, откуда получим, что



$$\beta = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}.$$

$$\beta = \sqrt{\frac{9{,}8}{9{,}8 \cdot 10^{-2}}}\ \text{с}^{-1};$$

в) $\beta = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\lambda\omega}{2\pi} = \dfrac{\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\pi},$

где ω – частота затухающих колебаний;

ω_0 - частота собственных колебаний.

Преобразуя уравнение (1), получим для определения β следующее выражение:

$\beta^2 (4\pi^2 + \lambda^2) = \lambda^2 \omega_0^2$ - откуда находим, что

$$\beta = \frac{\lambda\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}} = \frac{\lambda \cdot \sqrt{\dfrac{g}{\Delta l}}}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}.$$

$$\beta = \frac{6 \cdot \sqrt{\dfrac{9{,}8}{9{,}8 \cdot 10^{-2}}}}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}} = 6{,}9\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: а)$\beta = 9{,}46\text{с}^{-1}$; б)$\beta = 10\text{с}^{-1}$; в)$\beta = 6{,}9\text{с}^{-1}$.

Пример 5*

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 405$ нФ, катушки с индуктивностью $L = 10$ мГн и сопротивления $R = 2$ Ом. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за один период колебаний?

Дано:
$C = 405\text{нФ} =$
$= 4{,}05 \cdot 10^{-7}$ Ф
$L = 10\text{мГн} = 10^{-2}$ Гн
$t = 10\text{с}$
$R = 2$ Ом

$\dfrac{U(t)}{U(t+T)} - ?$

Решение: Амплитудное значение разности потенциалов, при затухающих колебаниях, уменьшается по экспоненциальному закону

$$U(t) = U_m \cdot e^{-\beta t},$$

где U_m – амплитуда разности потенциалов в начальный момент времени t_0;

$\beta = \dfrac{R}{2L}$ - коэффициент затухания.

Тогда
$$\frac{U(t)}{U(t+T)} = \frac{U_m \cdot e^{-\beta t}}{U_m e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T},$$

где $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ – период затухающих колебаний.

Так как частота ω затухающих колебаний связана с частотой $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ собственных колебаний соотношением $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, то период затухающих колебаний вычисляется так:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{LC}} - (\dfrac{R}{2L})^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{U(t)}{U(t+T)} = \exp(\frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{LC}} - (\dfrac{R}{2L})^2}}).$$

$$\frac{U(t)}{U(t+t)} = \exp(\frac{2}{2 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{4{,}05 \cdot 10 - 7 \cdot 10^{-2}}} - (\dfrac{2}{2 \cdot 10^{-2}})^2}}) = 1{,}04.$$

Ответ: $\dfrac{U(t)}{U(t+t)} = 1{,}04$

Пример 6*

Колебательный контур имеет емкость $C = 1{,}1\,\text{нФ}$ и индуктивность $L = 5\,\text{мГн}$. Логарифмический декремент затухания $\lambda = 0{,}05$. За какое время вследствие затухания потеряется 99% энергии контура?

Дано:
$C = 1{,}1 \cdot 10^{-9}\,\text{Ф}$
$L = 5 \cdot 10^{-3}\,\text{Гн}$
$\lambda = 0{,}05$
$\dfrac{\Delta E(t_1)}{E} = 0{,}99$
$t_1 - ?$

Решение: Энергия колебательного контура равна максимальной энергии электрического поля в контуре, которая пропорциональна амплитуде заряда на обкладках конденсатора:

$$E = (W_{\text{эл}})_{\max} = \frac{q^2(t)}{2C},$$

где $q(t) = q_0 \cdot e^{-\beta t}$.

Преобразуем заданное условие $\dfrac{\Delta E(t_1)}{E} = 0{,}99$ к виду:

$$\frac{\Delta E(t_1)}{E} = \frac{E_t - E_t + t_1}{E_t} = 1 - \frac{q_0^2 \cdot e^{-2\beta(t+t_1)}}{q_0^2 \cdot e^{-2\beta t}};$$

По условию задачи

$$1 - e^{-2\beta t} = 0{,}99, \text{ т.е. } e^{2\beta t_1} = 100$$

$$t_1 = \frac{\ln 100}{2\beta}.$$

Чтобы найти коэффициент затухания β, выразим его через логарифмический декремент затухания λ и частоту незатухающих колебаний в контуре ω_0

$$\lambda = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \beta^2}};$$

отсюда $\lambda^2\left(\dfrac{1}{LC} - \beta^2\right) = 4\pi^2\beta^2$; $\beta = \dfrac{\lambda}{\sqrt{LC(4\pi^2 + \lambda^2)}}$;

С учетом этого $t_1 = \dfrac{\ln 100\sqrt{LC(4\pi^2 + \lambda^2)}}{2\lambda}$.

Произведем вычисления:

$$t_1 = \frac{\ln 100\sqrt{1{,}1 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-3}(4\pi^2 + 25 \cdot 10^{-4})}}{25 \cdot 10^{-2}} \approx 6{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{с}$$

Ответ: $t_1 \approx 6{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{с}$

Пример 7

Гиря массой $m = 400\,\text{г}$, подвешенная на пружине жесткостью $k = 40\,\text{Н/м}$, опущена в масло. Коэффициент сопротивления r для этой системы составляет $0{,}5\,\text{кг/с}$. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = \cos\omega t$ (Н).Определите: 1) амплитуду вынуждающих колебаний, если частота вынуждающей силы вдвое меньше частоты собственных колебаний; 2) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 3) резонансную амплитуду.

Дано:	Решение:
$m = 400$ г $r = 0{,}5$ кг/с $F = \cos\omega t$,Н $k = 40$ Н/м $\omega_0 = 2\omega$	1) Амплитуда вынужденных колебаний:
1) $A-?$ 2) $\omega_{рез}-?$ 3) $A_{рез}-?$	

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - 2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

Учитывая, что $\beta = \dfrac{r}{2m}$, а $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ и $\omega = \dfrac{\omega_0}{2}$ получаем

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\frac{k}{m} - \frac{k}{4m})^2 + 4\frac{k\cdot r^2}{4m\cdot 4m^2}}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\frac{3k}{4m})^2 + \frac{k\cdot r^2}{4m^3}}} =$$

$$= \frac{2F_0}{m\sqrt{(\frac{3k}{4})^2 + \frac{k\cdot r^2}{m}}}$$

Подставляя значения, получаем

$$A = \frac{2\cdot 1}{\sqrt{(\frac{3\cdot 40}{4})^2 + \frac{40\cdot 0{,}25}{0{,}4}}} = 3{,}3\cdot 10^{-2}\,\text{м=3,3 см}$$

$$2)\ \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{2r^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{40}{0{,}4} - \frac{0{,}25}{20{,}16}} = 9{,}96\,\text{с}^{-1};$$

$$3)\ A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_0}{2m\frac{r}{2m}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} = \frac{1}{0{,}5\sqrt{\frac{40}{0{,}4} - \frac{0{,}25}{4\cdot 0{,}16}}} = 0{,}2\,\text{м=20 см.}$$

Ответ: $A = 3{,}3$ см; $\omega_{рез} = 9{,}96\,\text{с}^{-1}$; $A_{рез} = 20$ см.

Пример 8.

Участок цепи, состоящий из последовательно соединенных конденсатора $R = 5$ Ом и активного сопротивления, подключили к внешнему переменному напряжению с амплитудой $U_m = 220$ В. При этом амплитуда установившегося тока оказалась равной $I_m = 10$ А. Найти разность фаз между током и внешним напряжением.

Дано:	Решение:
$R = 5Ом$ $U_m = 220B$ $I_m = 10A$	В данном случае $U = U_m\cos\omega t$, $I = I_m\cos(\omega t - \varphi)$ где φ определяется по формуле (28) при $L = 0$:
φ - ?	

$$tg\varphi = -\frac{1}{\omega CR}.$$

Неизвестное значение емкости C найдем из выражения для амплитуды тока

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}};$$

$$C = \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{(\frac{U_m}{I_m})^2 - R^2}}.$$

После подстановки в выражение для $tg\varphi$ получили:

$$\mathrm{tg}\varphi = -\sqrt{(\frac{U_m}{RI_m})^2 - 1};$$

Произведем вычисления:

$$\mathrm{tg}\varphi = -\sqrt{(\frac{220}{5 \cdot 10})^2 - 1} = -\sqrt{18{,}36} \approx -4{,}3;$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}(-4{,}3) = -77^0.$$

В нашем случае, это означает, что ток опережает по фазе напряжение.

Ответ: $tg\varphi = -4{,}3$; $\varphi = -77^0$.

3.2. Задачи для самостоятельного решения.

1. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время $t_1 = 5$ мин уменьшилась в $n_1 = 2$ раза. За какое время t_2, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в $n_2 = 16$ раз?

(t_2=20 мин)

2. Амплитуда колебаний математического маятника длиной $l = 1$ м за время $t = 10$ мин уменьшилась в $n = 2$ раза. Определить логарифмический декремент затухания колебаний λ.

($\lambda = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$)

3. Тело, совершающее затухающие колебания, за время $t = 50$ с потеряло 60% своей энергии. Определить коэффициент затухания β.

($\beta = 9{,}16 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$)

4. Гиря массой $m = 500$ г подвешена к пружине жесткостью $r = 20$ Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания $\lambda = 0{,}004$. Определить число полных колебаний N, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в $n = 2$ раза. За какое время t произойдет это уменьшение?

($N = 173$; t=172 с)

5. Определить период T затухающих колебаний T_0, если период собственных колебаний системы равен 1с, а логарифмический декремент затухания $\lambda = 1{,}2$.

($T = 1{,}02$ с)

6.* Математический маятник длиной $l = 0{,}5$ м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на $x_1 = 5$ см, а при втором (в ту же сторону) на $x_2 = 4$ см. Найти время релаксации, т.е. время, в течение которого амплитуда уменьшится в e раз, где e – основание натуральных логарифмов.

($t = 6{,}4$ с)

7.* Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2{,}22$ нФ и катушки длиной l=20 см из медной проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм. Найти логарифмический декремент затухания λ. Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017$ мкОм·м.

($\lambda = 0{,}018$)

8. Логарифмический декремент затухания колебаний в контуре λ равен $0{,}003$. Определить число полных колебаний N за которое амплитуда заряда на обкладках конденсатора уменьшилась в 2 раза.

($N = 230$)

9. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0{,}1$ мкФ и катушки с индуктивностью L. За время $t = 1$ мс разность потенциалов на обкладках конденсатора уменьшается в четыре раза. Логарифмический декремент затухания $\lambda = 0{,}22$. Чему равны индуктивность L и сопротивление R контура?

($L = 6{,}38$ мГн; $R = 17{,}7$ Ом)

10. Колебательный контур имеет емкость $C = 2{,}2$ нФ и индуктивность $L = 2{,}5$ мГн. Логарифмический декремент затухания $\lambda = 0{,}003$. Какой частью первоначального запасенной энергии будет обладать контур через время $t = 3T$ после начала колебаний (T - период затухающих колебаний)? Чему равен коэффициент затухания β?

($\frac{W_1}{W_0} = 0{,}98$; $\beta = 203{,}6\ c^{-1}$)

11. Определите логарифмический декремент затухания λ, при котором энергия колебательного контура за $N = 5$ полных колебаний уменьшается в $n = 8$ раз.

($\lambda = 0{,}21$)

12. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 10$ мГн, конденсатора емкостью $C = 0{,}1$ и резистора сопротивлением $R = 20$ Ом. Определите, через сколько полных колебаний N амплитуда колебаний в контуре уменьшается в e раз.

($N = 5$)

13. Гиря массой $m = 0{,}5$ кг, подвешенная на пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}5$ кг/с. На верхний конец пружина действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0{,}1\cos\omega t$,Н. Определите для данной колебательной системы: 1) коэффициент затухания β; 2) резонансную амплитуду $A_{рез}$.

($\beta = 0{,}5\ c^{-1}$; $A_{рез}$=2 см)

14. Гиря массой $m = 200$ г, подвешенная на пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}2$ кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0{,}2\cos\omega t$,Н. Определите: 1) частоту собственных колебаний ν_0; 2) резонансную частоту $\nu_{рез}$; 3) резонансную амплитуду $A_{рез}$.

$(\nu_0 = 7{,}96\,\text{Гц};\ \nu_{рез}=7{,}88\ \text{Гц};\ A_{рез}=2\ \text{см})$

15. Собственная частота ν_0 колебаний некоторой системы составляет 500 Гц. Определите частоту ν затухающих колебаний этой системы, если резонансная частота $\nu_{рез} = 499\,\text{Гц}$.

$(\nu = 499{,}5\,\text{Гц})$

16. В цепь колебательного контура, содержащего последовательно соединенные резистор сопротивлением $R = 40\,\text{Ом}$, катушку индуктивностью $L = 0{,}36\,\text{Гн}$ и конденсатор емкостью C=28мкФ, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением I_m =180В и частотой ω=314 рад/с. Определите: 1) амплитудное значение силы тока I_m в цепи; 2) сдвиг по фазе между током и внешним напряжением.

(I_m =4,5А, φ = -1°, ток опережает напряжение)

17.* Катушка длиной l = 50 см и площадью поперечного сечения S = 10 см^2 включена в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц. Число витков катушки N = 3000. Найти сопротивление катушки, если сдвиг фаз между напряжением и током φ = 60°.

(R = 8,36 кОм)

18. Обмотка катушки состоит из N = 500 витков медной проволоки (удельное сопротивление меди ρ = 0,017 мкОм·м), площадь поперечного сечения которой S = 0,5 мм^2. Длина катушки l = 50 см, ее диаметр D = 5 см. При какой частоте переменного тока полное сопротивление Z катушки вдвое больше ее активного сопротивления R?

(ν = 59,6 Гц)