Министерство образования Российской Федерации
Уральский государственный технический университет

ФИЗИКА: КВАНТОВАЯ ОПТИКА. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА.

МОДУЛЬ 7.

Рабочая тетрадь
для студентов, обучающихся по дистанционной технологии

Екатеринбург 2006

УДК 373.53

Составители Т.К.Костина, И.В.Вандышева, В.С.Черняев, З.А.Истомина, А.Д.Спектор
Научный редактор проф., д-р физ.-мат.наук Повзнер А.А.
ФИЗИКА: КВАНТОВАЯ ОПТИКА. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА. Модуль 7: Рабочая тетрадь / Т.К.Костина, И.В.Вандышева, В.С.Черняев, З.А.Истомина, А.Д.Спектор Екатеринбург: ООО "Издательство УМЦ-УПИ", 2006. 25 с.

В рабочей тетради приведены основные понятия и формулы квантовой оптики и квантовой механики. Даны рекомендации по решению задач, разобраны примеры решения задач и предложены задачи для самостоятельного решения.

Подготовлено кафедрой физики УГТУ.

ООО "Издательство УМЦ-УПИ", 2006-10-03

1. Квантовая оптика

Алгоритм решения задач:

1. Выяснить, в чем проявляется действие света и обусловлено ли это действие квантовыми свойствами излучения.
2. Выяснить какое из явлений квантовой оптики рассматривается в задаче, каким законами оно подчиняется, какими уравнениями описывается.
3. В зависимости от условия задачи, выбрать соответствующие уравнения и решить их относительно неизвестных величин.

1.1. Тепловое излучение

Основные понятия и формулы

1. Закон Кирхгофа

$$\left(\frac{e_{\lambda T}}{a_{\lambda T}}\right)_1 = E_{\lambda T},$$

где $e_{\lambda T}$ - спектральная излучательная способность тела;

$a_{\lambda T}$ - спектральная поглощательная способность тела;

$E_{\lambda T}$ - спектральная излучательная способность АЧТ.

2. Закон Стефана Больцмана

$$E_T = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{Дж}{м^2 \cdot с \cdot К^4}$$ где

E_T - интегральная излучательная способность АЧТ
T – термодинамическая температура

3. $$E_T = \int_0^\infty E_{\lambda T}\, d\lambda$$

$$e_T = a_T \sigma T^4$$

4.

где e_T – интегральная излучательная способность серого тела

a_T – поглошательная способность серого тела

5. Закон смещения Вина

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

где - $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ м \cdot К$ постоянная Вина;

λ_{max} – длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной излучательной способности;

T- термодинамическая температура

6. Второй закон Вина

$$\left(E_{\lambda T}\right)_{\max} = cT^5$$

где $c = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\ \frac{Дж}{м^2 с \cdot м \cdot К^5}$ - постоянная Вина;

T- термодинамическая температура

$\left(E_{\lambda T}\right)_{\max}$ - максимальная излучательная способность АЧТ

7. $W = E_T \cdot S \cdot t$ – энергия, излученная нагретым телом

где E_T - интегральная излучательная способность АЧТ;

S – поверхность тела;

t - время излучения

Примеры решения задач

1) ***Изучение спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности его излучения соответствует длине волны 550 нм. Считая солнце АЧТ, найти суточную убыль массы солнца (ΔM), уносимую излучением. Радиус Солнца $7\cdot10^8$м .***

$\lambda_m = 550\ \text{нм} = 5{,}5\cdot10^{-7}\ \text{м}$

$R_c = 7\cdot10^{8}\ \text{м}$

$t = 1\ \text{сутки}$

$\Delta M = ?$

- Убыль массы Солнца может быть найдена на основании уравнения Эйнштейна $E = mc^2$
- Энергия, уносимая излучением может быть найдена по уравнению
$$W = E_T\cdot S_c\cdot t$$
- По условию задачи Солнце можно считать АЧТ, следовательно справедлив закон Стефана – Больцмана
$$E_T = \sigma\cdot T_c^4$$
-
- Температуру Солнца найдем по закону смещения Вина
$$\lambda_m = \frac{b}{T^4}$$
- Используя все перечисленные законы имеем:
$$\Delta M = \frac{W}{c^2} = \frac{\sigma\cdot b^4\cdot S_c\cdot t}{\lambda^4\cdot c^2} = \frac{\sigma\cdot b^4\cdot 4\pi\cdot R_c^2\cdot t}{\lambda^4\cdot c^2}$$
- Произведем вычисления
$$\Delta M = \frac{5{,}67\cdot10^{-8}\cdot(2{,}9\cdot10^{-3})^4\cdot4\cdot3{,}14\cdot(7\cdot10^{8})^2\cdot24\cdot60\cdot60}{(5{,}5\cdot10^{-7})^4\cdot(3\cdot10^{8})^2} = 2{,}59\cdot10^{14},\ \text{кг}$$

Вывод: • суточная потеря массы солнца колоссальна, однако эта величина очень мала, по сравнению с массой самого солнца $M_c=2\cdot10^{30}$ кг, следовательно, ослабление со временем потока энергии идущего от солнца и поддерживающего жизнь на земле, ничтожно мало; • λ_{max} - в спектре излучения солнца приходится на область видимого света, солнце – источник света с самым высоким к.п.д.

$$\eta = \frac{W_{вид}}{W}$$

где - $W_{вид}$ – энергия, излученная в видимой части спектра

W – энергия, излученная во всем диапазоне длин волн

2) Поток энергии, излучаемый из смотрового окна плавильной печи составляет 34 Вт, площадь окна 6 кв.см. Определить температуру в печи.

$P = 34\ Вт$

$S = 6\ см^2$

$T = ?$

- Смотровое окно в плавильной печи можно принять за АЧТ (см. модель АЧТ), тогда излученная энергия может быть записана в виде:

$$W = E_T \cdot S \cdot t \quad или \quad P = \frac{W}{t} = E_T \cdot S$$

- Для АЧТ справедлив закон Стефана – Больцмана:

$$E_T = \sigma \cdot T^4$$

- Учитывая это, запишем

$$P = \sigma \cdot T^4 \cdot S, \quad тогда \quad T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma \cdot S}}$$

- Произведем вычисления:

$$T = \sqrt[4]{\frac{34}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt[4]{1 \cdot 10^{=8=4}} = 10^{3}, K$$

3) Найти энергию, излучаемую с единицы поверхности АЧТ в единицу времени, приходящуюся на узкий интервал длин волн в 10 ангстрем вблизи максимума спектральной плотности излучения. Температура тела 3000 К.

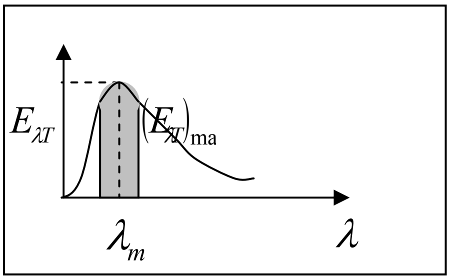
$T = 3000K$

$\Delta\lambda = 10\overset{\circ}{A} = 10 \cdot 10^{-10}$ *м*

$\lambda = \lambda_m$

$\Delta E_T = ?$

- Спектральная излучательная способность АЧТ имеет сложную зависимость от длины волны при постоянной температуре



• В задаче задан интервал длин волн $\Delta\lambda$ вблизи λ_m . Энергия, излучаемая в этом интервале, будет равна площади выделенной фигуры

$$\Delta E_T = (E_{\lambda T})_{\max} \cdot \Delta\lambda$$

- По второму закону Вина определим

$$(E_{\lambda T})_{\max} = c \cdot T^5$$

- Тогда имеем $\Delta E_T = c \cdot T^5 \cdot \Delta\lambda$
- Произведем вычисления

$$\Delta E_T = 1{,}29 \cdot 10^{-5} \cdot (3 \cdot 10^3)^5 \cdot 10 \cdot 10^{-10} = 3135 \,, \frac{Дж}{м^2 с}$$

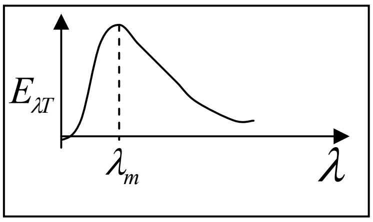
$$(E_{\lambda T})_{\max}$$

4) Какова должна быть температура АЧТ, чтобы приходился на красную границу видимого спектра
($\lambda_{кр}$= 760 нм); на фиолетовую ($\lambda_ф$= 760 нм) ?

$\lambda_{кр} = 760 \ нм$
$\lambda_ф = 380 \ нм$

$T = ?$

- Спектр излучения АЧТ имеет вид



- По закону смещения Вина : $\lambda_m = \dfrac{b}{T}$
- Тогда можно записать:

$$\lambda_m = \lambda_{кр} = \frac{b}{T_{rh}} \quad \text{или} \quad T_{кр} = \frac{b}{\lambda_{кр}}$$

$$\lambda_m = \lambda_ф = \frac{b}{T_ф} \quad \text{или} \quad T_ф = \frac{b}{\lambda_ф}$$

- Проведем вычисления:

$$T_{кр} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{760 \cdot 10^{-9}} = 3820{,}K \qquad T_ф = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{380 \cdot 10^{-9}} = 7630{,}K$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Мощность излучения раскаленной металлической поверхности составляет 0,67 кВт. Температура поверхности 2500 К, ее площадь 10 кв.см. Какую мощность излучения N имела бы эта поверхность, если бы она была абсолютно черной ? Найти отношение k энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

Ответ: N = 2,22 кВт, k = 0?3

2. Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке 0,3 мм, длина спирали 5 см. При включении лампочки в сеть напряжением 127 В через лампочку течет ток 0,31 А. Найти температуру Т спирали. Считать, что по установлении равновесия все выделяющиеся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетических светимостей вольфрама и абсолютно черного тела для данной температуры k = 0,31.

Ответ: Т = 2500 К

3. Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке 2450 К. Отношение ее энергетической светимости к энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре k = 0,3. Найти площадь S излучающей поверхности спирали.

Ответ: $S = 4 \cdot 10^{-5}$ *м*^{2}

4. Абсолютно черное тело имеет температуру T_1 = 2900 К. В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda$ = 9 мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело ?

Ответ: Т $_2$= 290 К

1.2. Фотоэффект

Основные понятия и формулы

1. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h \cdot \nu = A + \frac{m \cdot V_{\max}^2}{2}$$

где $h\nu$ - энергия фотона, падающего на поверхность металла;

A – работа выхода электрона;

$\frac{m \cdot V_{\max}^2}{2}$ - кинетическая энергия электрона, вылетевшего из металла.

2. Красная граница фотоэффекта

$$\nu_{кр} = \frac{A}{h} \quad или \quad \lambda_{кр} = \frac{h \cdot c}{A}$$

3. Энергия фотона

$$\varepsilon = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

4. Масса, импульс фотона

$$m_ф = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h \cdot \nu}{c^2} \qquad P_ф = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Примеры решения задач

1) Определить энергию, массу, импульс фотона если соответствующая ему длина волны 0,16 нм.

$\lambda = 0{,}0016\,нм = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ м$

$\varepsilon_ф = ?$

$m_a = ?$

$p_ф = ?$

- Энергия фотона может быть записана в виде:

$$\varepsilon = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

$$\varepsilon_ф = m_ф \cdot c^2 \quad или \quad h \cdot \frac{c}{\lambda} = m_ф \cdot c^2 \ \Rightarrow \ m_ф = \frac{h}{\lambda \cdot c}$$

- Массу фотона найдем из уравнения

- Импульс фотона:

$$p_ф = m_ф \cdot c \qquad или \qquad p_ф = \frac{h}{\lambda}$$

- Произведем вычисления:

$$\varepsilon = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1.6 \cdot 10^{-12}} = 12{,}4 \cdot 10^{-34+8+12} = 12{,}4 \cdot 10^{-14}\ Дж =$$

$$= \frac{12{,}4 \cdot 10^{-14}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\ эВ = 7{,}75 \cdot 10^{5}\ эВ = 0{,}77\ МэВ$$

$$m_ф = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{1{,}6 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 1{,}4 \cdot 10^{-34+12+8} = 1{,}4 \cdot 10^{-30}\ кг$$

$$p_ф = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}} = 4{,}14 \cdot 10^{-22}\ н \cdot с$$

2) Импульс, переносимый монохроматическим пучком фотонов через площадку 2 см² за 0,5 мин, равен 3·10⁻⁵ н·с. Для этого пучка фотонов рассчитать энергию, падающую за единицу времени на единицу площади.

$S = 2\ см^2$

$t = 0{,}5\ мин = 30\ с$

$p = 3 \cdot 10^{-5}\ н \cdot с$

$w = ?$

• Импульс фотона , $p_ф = h/\lambda$
импульс переносимый монохроматическим пучком состоящим из N фотонов падающих на *2 см²* за *30 с* равен $p = N \cdot p_ф \cdot S \cdot t$

• Энергия фотона $\varepsilon_ф = m_ф c^2 = p_ф \cdot c$

• Энергия пучка из *N* фотонов, падающих на единицу площади за единицу времени

$\varepsilon = N \cdot \varepsilon_ф = N \cdot p_ф \cdot c = p \cdot c$

• Энергия пучка из *N* фотонов, падающих на площадку площадью *S* за время *t*, . $W = \varepsilon \cdot S \cdot t = N \cdot p_ф \cdot c \cdot S \cdot t$

Тогда энергия, приходящаяся на единицу площади за единицу времени

$w = W/S \cdot t = N \cdot p_ф \cdot c \cdot S \cdot t / S \cdot t = p \cdot c / S \cdot t$

• Проведем расчет :

$$w = \frac{3 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 30} = 1{,}5 \cdot 10^{-5+8+4-1} = 1{,}5 \cdot 10^{6},\ \frac{Дж}{м^2 \cdot с}$$

3) Найти частоту света, вырывающего с поверхности металла электроны, полностью задерживаемые обратным потенциалом 3 В. Фотоэффект для этого металла начинается при частоте падающего света 6·10¹⁴ с⁻¹. Рассчитать работу выхода электрона из этого металла.

$U_з = 3\ В$

$\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}\ с^{-1}$

$A = ?$

$\nu = ?$

• Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэф фекта

$$h \cdot \nu = A + \frac{m \cdot v_{\max}^2}{2}$$

или

$$h \cdot \nu = A + e \cdot U_з$$

- Учтем, что $A = h \cdot \nu_0$
- Тогда уравнение Эйнштейна запишем в виде:

$$h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + e \cdot U_з \text{или} \qquad \nu = \frac{h \cdot \nu_0 + e \cdot U_з}{h} = \nu_0 + \frac{e \cdot U_з}{h}$$

- Рассчитаем численные значения:

$$A = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 6 \cdot 10^{14} = 39{,}72 \cdot 10^{-20}, \textit{Дж} = 2{,}48, \textit{эВ}$$

$$\nu = 6 \cdot 10^{14} + \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3}{6{,}62 \cdot 10^{-34}} = 6 \cdot 10^{14} + 7{,}2 \cdot 10^{14} = 13{,}2 \cdot 10^{14}, c^{-1}$$

4***) Определить постоянную Планка, если известно, что фотоэлектроны, вырываемые с поверхности некоторого металла светом с частотой 2,2·10¹⁵ с⁻¹ полностью задерживаются обратным потенциалом 6,6 В, а вырываемые светом с частотой 4,6·10¹⁵ с⁻¹ – потенциалом 16,5 В.***

$\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15} \ c^{-1}$

$U_{з1} = 6{,}6 \ В$

$\nu_1 = 4{,}6 \cdot 10^{15} \ c^{-1}$

$U_{з1} = 16{,}5$

$h = ?$

- Запишем уравнение Эйнштейна для двух случаев

$$h \cdot \nu_1 = A + e \cdot U_{з1}$$

$$h \cdot \nu_2 = A + e \cdot U_{з2}$$

- Поскольку, фотокатод один и тот же, то

$$A = const$$

- Вычтем из второго уравнения первое :

$$h(\nu_2 - \nu_1) = e \cdot (U_{з2} - U_{з1})$$

- Тогда

$$h = \frac{e \cdot (U_{з2} - U_{з1})}{(\nu_2 - \nu_1)}$$

- Произведем вычисления:

$$h = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}(16{,}5 - 6{,}6)}{(4{,}6 - 2{,}2) \cdot 10^{15}} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} 9{,}9}{2{,}4 \cdot 10^{15}} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}, \textit{Дж} \cdot c$$

Задачи для самостоятельной работы

1. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны 520 нм ?

Ответ: $9{,}2\cdot 10^5$ *м/с.*

2. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы количество его движения было равно количеству движения фотона с длиной волны 520 нм ?

Ответ: 1400 м/с.

3. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна 275 нм. Чему равно минимальное значение энергии фотона, вызывающего фотоэффект ?

Ответ: 4,5 эВ.

4. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна 275 нм. Найти: 1) работу выхода электрона из этого металла, 2) максимальную скорость электронов, вырываемых из этого металла светом с длиной волны 180 нм, 3) максимальную кинетическую энергию этих электронов.

Ответ: 1) 4,5 эВ, 2) $9{,}1\cdot 10^5$ *м/с, 3) 2,4 эВ.*

1.3. Эффект Комптона

Основные формулы

Формула Комптона

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{h}{m_{0e}\cdot c}(1-\cos\theta) ,$$

где λ_1 - длина волны рассеянного фотона;

λ - длина волны, падающего фотона;

θ - угол рассеяния фотона;

m_{0e} - масса покоя электрона.

Примеры решения задач

1) Рентгеновские лучи длиной 0,0708 нм испытывают комптоновское рассеяние на парафине. Найти длину волны рентгеновских лучей рассеянных в направлении $\pi/2$, и в направлении π.

$\lambda = 0{,}0708$ *нм*

$\theta_1 = \pi/2$

$\theta_2 = \pi$

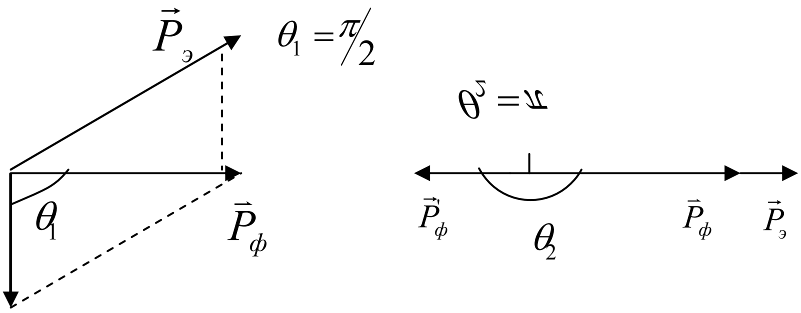
$\lambda_1 = ?$

$\lambda_2 = ?$

- Рентгеновский фотон с длиной волны λ испытывает рассеяние на парафине, возникает рассеянный фотон с длиной волны λ_1 и электрон отдачи. При этом выполняется закон сохранения импульса:

$$\vec{P}_{ф} = \vec{P}'_{ф} + \vec{P}_{э}$$

- Изобразим диаграмму импульсов для углов рассеяния θ_1 и θ_2:



- Используя соотношение Комптона найдем длину волны, рассеянного фотона:

$$\lambda_1 - \lambda = \Lambda\left(1 - \cos\theta\right)$$

- Произведем вычисления:

$$\theta_1 = \pi/2 \qquad \lambda_1 = \lambda + \Lambda(1 - \cos\theta_1) = \lambda + \Lambda(1 - \cos\frac{\pi}{2}) =$$

$$= \lambda + \Lambda = 0{,}0708 + 0{,}00242 = 0{,}0732 \, нм$$

$$\theta = \pi \qquad \lambda_2 = \lambda + \Lambda(1 - \cos\theta_2) = \lambda + \Lambda(1 - (-1)) =$$

$$= 2\Lambda + \lambda = 0{,}00484 + 0{,}0708 = 0{,}0756 \, нм$$

2) Фотон с энергией ε =0,75 Мэв рассеялся на свободном электроне под углом 60 °. Считая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения пренебрежимо малы, определить: 1. энергию рассеянного фотона ε'; 2.кинетическую энергию электрона отдачи; 3. направление его движения - φ.

$\varepsilon = 0{,}75$ *Мэв*

$\theta = 60°$

$\varepsilon' = ?$

$K = ?$

$\varphi = ?$

- Используем уравнение Комптона

$$\lambda_1 - \lambda = \Lambda\left(1 - \cos\theta\right)$$

- Выразив длины волн через энергии фотонов,

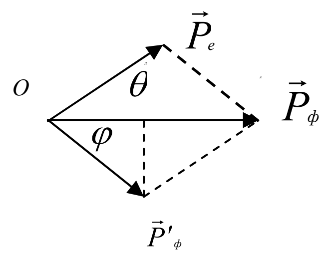
получим:

$$\frac{h\cdot c}{\varepsilon'} - \frac{h\cdot c}{\varepsilon} = \frac{h}{m_{0e}\cdot c}\left(1 - \cos\theta\right)$$

Разделим обе части равенства на $h\cdot c$, $\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1-\cos\theta}{m_{0e}\cdot c^2}$

тогда $$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{m_{0e}\cdot c^2}\left(1-\cos\theta\right)+1} \qquad (1)$$

- По закону сохранения энергии $K = \varepsilon - \varepsilon'$
- Направление движения электрона найдем по закону сохранения импульса $\vec{P}_ф$ и изобразим векторную диаграмму:



Из треугольника ОСД найдем

$$tg\,\varphi = \frac{СД}{ОД} = \frac{CA\cdot\sin\theta}{OA - CA\cdot\sin\theta}$$

$$tg\ \varphi = \frac{P'_\phi \sin\theta}{P_\phi - P'_\phi \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{P_\phi}{P'_\phi} - \cos\theta},$$ так как

$$P_\phi = \frac{\varepsilon}{c} \quad и \quad P'_\phi = \frac{\varepsilon'}{c},$$

$$tg = \frac{\sin\theta}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \cos\theta} \quad (2).$$

Выразим из $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon}{m_{0e}c^2}(1-\cos\theta)+1$ (1) и

подставив в (2), получим:

$$tg\ \varphi = \frac{\sin\theta}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{m_{0e}c^2}\right)(1-\cos\theta)}.$$

Учитывая, что $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ и $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

получим: $tg\ \varphi = \dfrac{ctg\frac{\theta}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{m_{0e}c^2}}.$

Произведем численный расчет:

$$\varepsilon' = \frac{0{,}75}{\frac{0{,}75}{0{,}51}(1-\cos 60^\circ)+1} = 0{,}43\ Мэв. \qquad K = 0{,}75 - 0{,}43 = 0{,}32\ Мэв.$$

$$tg\varphi = \frac{ctg 30^\circ}{1+\frac{0{,}75}{0{,}51}} = 0{,}701 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 35^\circ.$$

3) При эффекте Комптона фотон после соударения с электроном был рассеян на 90°. Энергия рассеянного фотона 0,4 Мэв. Определить энергию фотона до рассеяния.

$\theta = 90^\circ$

$\varepsilon' = 0{,}4\ Мэв$

$\varepsilon = ?$

$$\lambda' - \lambda = \Lambda(1-\cos\theta) = 2\Lambda\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{hc}{\varepsilon'} - \frac{hc}{\varepsilon} = \Lambda(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' m_{0e} c^2}{m_{0e}c^2 - \varepsilon' 2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\varepsilon' \cdot E_0}{E_0 - 2\varepsilon' \sin^2\frac{\theta}{2}},$$

где $E_0 = m_{0e}c^2 = 0{,}51\ \textit{Мэв}$ - энергия покоя электрона.

$$\varepsilon = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}51}{0{,}51 - 2 \cdot 0{,}4 \cdot \sin^2 45^\circ} = 1{,}85\ \textit{Мэв}.$$

2) Определить максимальное изменение длины волны при эффекте Комптона на свободных электронах, на свободных протонах.

$m_{0e} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \textit{кг}$

$m_{0p} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \textit{кг}$

$\Delta\lambda_{\max} = ?$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \Lambda(1 - \cos\theta)$$

Изменение длины волны будет иметь наибольшее значение когда угол рассеяния фотона составит 180 °. Следовательно :

для электрона $\Delta\lambda_{\max} = \dfrac{2h}{m_{0e}c} = 2{,}42 \cdot 10^{-12}\ \textit{м} = 2{,}42 \cdot 10^{-2}\ \dot{A},$

для протона $\Delta\lambda_{\max} = \dfrac{2h}{m_{0p}c} = 1{,}4 \cdot 10^{-15}\ \textit{м} = 1{,}4 \cdot 10^{-5}\ \dot{A}.$

Задачи для самостоятельной работы

1. Рентгеновские лучи с длиной волны 0,2 А° испытывают комптоновское рассеяние под углом 90°. Найти: 1) изменение длины волны рентгеновских лучей при рассеянии; 2) энергию электрона отдачи; 3) количество движения электронов отдачи.

Ответ: 0,024 А°, 6,6·10^{5} *эВ, 4,4·10*$^{-23}$ *Н·с.*

2. В явлении Комптона энергия падающего фотона распределяется между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния равен 90°. Найти энергию и количество движения рассеянного фотона.

Ответ: $2{,}6\cdot10^5$ эВ, $9{,}3\cdot10^{-12}$ Н·с.

3. Энергия рентгеновских лучей равна 0,6 Мэв. Найти энергию электрона отдачи, если известно, что длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния изменилась на 20 %.

Ответ: $2{,}6\cdot10^5$ эВ, $9{,}3\cdot10^{-12}$ Н·с.

4. Какова длина волны рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом 60° длина волны рассеянного излучения оказалась равной $2{,}54\cdot10^{-9}$ см ?

Ответ:. 0,242 А°.

2. Элементы квантовой механики

Алгоритм решения задач:

1. Выяснить о макро или микро частице идет речь в задаче, надо ли учитывать ее волновые свойства.
2. Определиться с возможностью описать поведение частицы с использованием соотношения неопределенностей Гейзенберга, уравнения Шредингера.
3. В соответствии с условием задачи записать уравнения и решить их относительно неизвестных величин.

Основные понятия и формулы

1. Формула де Бройля

$$\lambda_Б = \frac{h}{mV}$$

где $\lambda_Б$ – волна, связанная с частицей, обладающей импульсом

$P = mV$,

$h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ *Дж/с* – постоянная Планка

2. Соотношение неопределенностей для координат и импульса частицы

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar$$

$$\Delta y \cdot \Delta P_y \geq \hbar$$

$$\Delta z \cdot \Delta P_z \geq \hbar$$

где $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ – неопределенность координат

$\Delta P_x,\ \Delta P_y\ ,\ \Delta P_z$, - неопределенность соответствующих проекций импульса частицы на оси координат

3. Соотношение неопределенностей для энергии и времени

$$\Delta E \cdot \Delta \tau \geq \hbar$$

где ΔE – неопределенность энергии данного квантового состояния,

$\Delta \tau$ - время пребывания системы в данном состоянии

4. Вероятность нахождения микрочастицы в объеме dV

$$dW = \psi \psi^* dV = |\psi|^2 dV$$

где ψ -волновая функция описываемого состояния системы

ψ^* - функция комплексно сопряженная с ψ.

- $|\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$ квадрат модуля волновой функции

5. Условие нормировки вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1$$

интегрирование ведется по всему бесконечному пространству.

6. Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

7. Стационарное уравнение Шредингера

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

$\psi = \psi(x,y,z)$ – координатная часть волновой функции

$U = U(x,y,z)$ – потенциальная энергия частицы

E - полная энергия частицы

8. Собственные значения энергии частицы, находящейся на n-ом энергетическом уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m \cdot l^2}, \quad n = 1, 2, 3 .....$$

где l – ширина ямы.

8. Собственная волновая функция, соответствующая приведенному выше собственному значению энергии

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin n\frac{\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, 3......$$

9. Коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера конечной ширины l

$$D = D_0 \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\right]$$

где $D_0 \approx 1$

$U = U(x,y,z)$ – высота потенциального барьера

E - полная энергия частицы

2.1. Волны де Бройля

Примеры решения задач

1) ***Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов 51 В. Найти длину волны де Бройля электрона.***

$U = 51\,B$

$\lambda_Б = ?$

Запишем формулу де Бройля : $\lambda_Б = \dfrac{h}{mV}$.

Пройдя ускоряющую разность потенциалов электрон приобрел кинетическую энергию (нерелятивистский случай):

$$eU = \frac{mV^2}{2} = \frac{(mV)^2}{2m} = \frac{P^2}{2m}.$$

Отсюда выразим импульс электрона и запишем выражение для длины волны де Бройля:

$$\lambda_Б = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{h}{\sqrt{2me}\cdot\sqrt{U}} = \frac{12{,}25}{\sqrt{U}}, \dot{A}$$

2) ***Вычислить с какой скоростью движется электрон, если длина волны де Бройля для него численно равна его комптоновской длине волны.***

$$\lambda_Б = \Lambda = \frac{h}{m_{0e}c}$$

$$V = ?$$

$$\lambda_Б = \frac{h}{m_e V}, \quad где \quad m_e = \frac{m_{0e}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Тогда имеем:

$$\frac{h}{m_{0e}c} = \frac{h}{m_e V} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{m_{0e}c} = \frac{h\sqrt{1-V^2/c^2}}{m_{0e}V}$$

Отсюда:

$$\frac{V}{c} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{V^2}{c^2} = 1-\frac{V^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad V^2 = \frac{c^2}{2}, \quad V = 2{,}12\cdot 10^8\ м/с.$$

3) ***Электрон движется по окружности радиусом 0,5 см в однородном магнитном поле с индукцией 8 мТл. Определить длину его волны де Бройля.***

$$R = 0{,}5\ см$$
$$B = 8\ мТл$$

$$\lambda_Б = ?$$

$$\lambda_Б = \frac{h}{mV}.$$

Электрон движется в магнитном поле, следовательно на него действует сила Лоренца и он подчиняется 2-му закону Ньютона. Тогда запишем :

$$q_e VB = m_{0e}\frac{V^2}{R} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{q_e VB}{m_{0e}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_Б = \frac{hm_{0e}}{m_{0e}q_e BR} = \frac{h}{q_e BR},$$

$$\lambda_Б = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 8\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-2}} = 1{,}03\cdot 10^{-10}\ м.$$

4) ***Определить длину волны де Бройля электронов, бомбардирующих антикатод рентгеновской трубки, если граница сплошного спектра рентгеновских лучей приходится на 30 А°.***

$\lambda_{\min} = 30\ \dot{A}$

$\lambda_Б = ?$

Для сплошного рентгеновского спектра имеем:

$$\frac{hc}{\lambda_{\min}} = \frac{m_{0e}V^2}{2} = \frac{(m_{0e}V)^2}{2m_{0e}},$$

Выразим отсюда импульс электрона и подставим в выражение для длины волны де Бройля:

$$\lambda_Б = h\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{2m_{0e}hc}} = \sqrt{\frac{h\lambda_{\min}}{2m_{0e}c}},$$

$$\lambda_Б = \sqrt{\frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 30 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^{8}}} = 0{,}6 \cdot 10^{-10}\ м.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти длину волны де Бройля для: 1) электрона, летящего со скоростью 10^8 см/с; 2) атома водорода, движущегося со скоростью равной средней квадратичной скорости при температуре 300 К; 3) шарика массой 1 г, движущегося со скоростью 1 см/с.

Ответ:7,3 А°; 1,44 А°;   6,6·10^{-27} м.

2. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов 200 В, имеет длину волны де Бройля, равную 0,0202 А°. Найти массу этой частицы, если известно, что ее заряд численно равен заряду электрона.

Ответ: 1,67·10^{-27} кг.

3. α-частица движется по окружности радиусом 0,83 см в однородном магнитном поле, напряженость которого 250 Э. Найти длину волны де Бройля для этой частицы.

Ответ: 0,1 А°.

4. Найти длину волны де Бройля для атоиа водорода, движущегося при температуре 293 К с наиболее вероятной скоростью.

Ответ:. 1*,8 А°.*

2.2. Соотношение неопределенностей

Примеры решения задач

1) *Кинетическая энергия электрона в атоме (К) составляет величину 10 эВ. Оценить минимальные размеры атома, используя соотношение неопределенностей.*

$K = 10 \text{ эВ}$

$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$

$l_{\min} = ?$

Пусть атом имеет линейные размеры l, электрон находится в атоме, следовательно:

$$\Delta x = l,$$

Тогда соотношение неопределенностей можно записать в виде:

$$l \cdot \Delta p_x \ge h,$$

Поскольку надо найти минимальные размеры атома, то Δp_x не должно превышать p_x, т.е. $\Delta p_x = p_x$. Импульс связан с кинетической энергией электрона соотношением:

$$K = \frac{P^2}{2m}.$$

Тогда получаем:

$$P_x = \frac{\hbar}{l} = \sqrt{2Km} \quad \Rightarrow \quad l_{\min} = \frac{\hbar}{\sqrt{2Km}},$$

$$l_{\min} = \frac{1{,}054 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 0{,}62\ \dot{A}.$$

2) *Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную полную энергию электрона в атоме водорода и соответствующее эффективное расстояние от ядра.*

$q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$

$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$

$l_{эф} = ?$

$E_{\min} = ?$

Электрон находится в атоме водорода, линейные размеры которого l, поэтому

$$\Delta x = l_{эф}.$$

Из соотношения неопределенностей

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \quad \Rightarrow \quad \Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{l_{эф}}$$

Так как по условию задачи надо определить минимальную энергию электрона, то

$$\Delta p_x \cong p_x.$$

Тогда

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

полная энергия электрона равна $E = K + U,$

где

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2{}_{эф}}.$$

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2{}_{эф}} = \frac{\hbar^2}{2ml^2{}_{эф}} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 l_{эф}}.$$

Чтобы найти $l_{эф}$ найдем и $dE/dl_{эф}$ приравняем ее к нулю.

$$\frac{dE}{dl_{эф}} = -\frac{2\hbar^2}{2ml^3{}_{эф}} + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2{}_{эф}} = 0 \quad \Rightarrow \quad l_{эф} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{mZe^2}$$

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2ml^2{}_{эф}} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 l_{эф}}.$$

Выполнив подстановку числовых значений получим

$$l_{эф} = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\ м, \quad E_{\min} = -21{,}66 \cdot 10^{-19}\ Дж = -13{,}54\ эВ.$$

3) ***Атом излучает фотон с длиной волны 550 нм. Время излучения 10^{-8} с. Определить неточность в определении указанной длины волны и с какой точностью может быть определено местонахождение данного фотона в направлении его движения.***

$\lambda = 550\ нм$

$\Delta\tau = 10^{-8}\ c$

$c = 3\cdot 10^{8}\ м/с$

$\Delta\lambda = ?$

$\Delta x = ?$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \frac{dE}{d\lambda} = -\frac{hc}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta\lambda} = \frac{hc}{\lambda^2}$$

$$\Delta E\cdot\Delta\tau \geq \hbar \Rightarrow \Delta E = \frac{\hbar}{\Delta\tau}$$

$$\frac{\hbar}{\Delta\tau\cdot\Delta\lambda} = \frac{hc}{\lambda^2} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\hbar\lambda^2}{\Delta\tau\cdot h\cdot c} = \frac{\lambda^2}{\Delta\tau\cdot 2\pi\cdot c}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta\lambda} = \frac{h\cdot\Delta\lambda}{\lambda^2};$$

$$\Delta p_x\Delta x \geq \hbar \Rightarrow \Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{\hbar\cdot\lambda^2}{h\cdot\Delta\lambda} = \frac{\lambda^2}{2\pi\cdot\Delta\lambda}.$$

Произведем вычисления: $\Delta\lambda = 1{,}6\cdot 10^{-14}\ м;\quad \Delta x = 3\ м.$

4) Найти естественную ширину линии K_α в серии Лаймана в спектре водорода, если время излучения 10^{-8} с. Энергия излучения при соответствующем переходе составляет 10,2 эВ.

$\Delta\tau = 10^{-8}\ c$

$E = 10{,}2\ эВ$

$\Delta\lambda = ?$

Электрон при переходе в атоме с одного уровня на другой излучает или поглощает энергию. Время излучения ограничено. Длина волны этого излучения будет иметь уширение *Δλ*, т.е. естественную ширину линии.

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \frac{dE}{d\lambda} = -\frac{h\cdot c}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta\lambda} = \left|\frac{h\cdot c}{\lambda^2}\right|$$

т.е. $\Delta\lambda = \dfrac{\Delta E\cdot\lambda^2}{hc}.$

$\Delta E\cdot\Delta\tau \geq \hbar \Rightarrow \Delta E = \dfrac{\hbar}{\Delta\tau}$, гда $\Delta\lambda = \dfrac{\hbar\cdot\lambda^2}{\Delta\tau\cdot h\cdot c} = \dfrac{\lambda^2}{\Delta\tau\cdot 2\pi\cdot c}$; то-

так как $\lambda = \dfrac{hc}{E}$, то

$$\Delta\lambda = \frac{(hc)^2}{E^2 2\pi\cdot c\cdot\Delta\tau} = \frac{h^2c}{E^2 2\pi\cdot\Delta\tau} = 7{,}86\cdot 10^{-16}\ м.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Электрон с кинетической энергией 15 эВ находится в металлической пылинке диаметром 1 мк. Оценить (в процентах) относительную неточность, с которой может быть определена скорость электрона.

Ответ: 0,01 %

2. Во сколько раз дебройлевская длина волны частицы меньше неопреде Ленности ее координаты, которая соответствует неопределенности импульса в 1% ?

Ответ: в 160 раз

3. Если допустить, что неопределенность координаты движущейся части цы равна дебройлевской длине волны, то какова будет относительная неточность импульса этой частицы ?

Ответ: 16 %

4. Определить неточность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $1{,}5 \cdot 10^6$ м/с, если допус каемая неточность в определении скорости составляет 10 % от е вели чины. Сравнить полученную неточность с диаметром атома водорода, вычисленном по теории Бора для основного состояния, и указать, применимо ли понятие траектории в данном случае.

Ответ: 77 нм; 10,6 нм; понятие траектории неприменимо.