Физика: Элементы физики атома.
Элементы физики твердого тела.
Элементы физики атомного ядра.
Физика элементарных частиц

Модуль № 8

Рабочая тетрадь
для студентов, обучающихся по дистанционной технологии

Екатеринбург 2004

ББК 22.38
Г981
УДК 539.1

Автор В.С.Гущин

Научный редактор проф., д-р физ.-мат. наук А.А.Повзнер

Г981 Физика: Элементы физики атома. Элементы физики твердого тела. Элементы физики атомного ядра. Физика элементарных частиц: Рабочая тетрадь /В.С.Гущин. Екатеринбург: ООО ”Издательство УМЦ УПИ”, 2006, 53 с.

Рабочая тетрадь представляет собой сборник задач по разделам: «Элементы физики атома», «Элементы физики твердого тела», «Элементы физики атомного ядра» и «Физика элементарных частиц» курса общей физики, читаемого студентам ГОУ ВПО УГТУ-УПИ. Рабочая тетрадь содержит примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. В ней представлены основные физические законы и соотношения, необходимые для решения задач, а также сформулированы алгоритмы решения основных их типов.

Подробное изложение решений задач и их анализ допускает самостоятельное изучение указанных разделов, однако не исключает «живого» общения с преподавателем и предназначено главным образом для его интенсификации.

Издание соответствует программе курса «Общая физика» и отвечает всем требованиям, принятым на кафедре физики ГОУ ВПО УГТУ-УПИ.

Подготовлено кафедрой физики ГОУ ВПО УГТУ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Начиная решать задачу, хорошо вникните в ее смысл и постановку вопроса. Выясните, все ли данные, необходимые для решения задачи, приведены. Недостающие данные нужно найти в таблицах. Если это необходимо, обязательно сделайте схематический рисунок, поясняющий сущность задачи, — это во многих случаях облегчает как поиск решения, так и само решение.

Задачу следует решать в общем виде (т.е. в буквенных обозначениях) так, чтобы искомая величина была выражена через заданные величины.

Решение в общем виде придает окончательному результату особую ценность, поскольку позволяет установить закономерность, показывающую, как искомая величина зависит от заданных величин.

Полученное в общем виде решение позволяет судить о правильности самого решения (см. следующий пункт), так как дает возможность проверить размерность искомой величины. Неверная размерность является явным признаком ошибочности решения.

Исследуйте поведение решения в предельных частных случаях. Например, какой бы вид ни имело выражение для силы гравитационного взаимодействия между двумя протяженными телами, с увеличением расстояния между телами оно должно непременно переходить в известный закон взаимодействия точечных масс. В противном случае можно сразу утверждать: решение неверное.

Приступая к вычислениям, помните, что числовые значения физических величин всегда являются приближенными. При расчетах руководствуйтесь правилами действий с приближенными числами. В частности, в полученном значении вычисленной величины нужно сохранить последним тот знак, единица которого еще превышает погрешность этой величины. Все следующие цифры надо отбросить.

Оцените правдоподобность полученного Вами числового ответа. Такая оценка в ряде случаев поможет обнаружить ошибочность полученного результата. Например, дальность полета брошенного человеком камня не может быть порядка сотен метров или скорость тела не может оказаться больше скорости света в вакууме и т. п.

8.1. Элементы физики атома

8.1.1. Основные понятия, формулы и законы

- Потенциальная энергия $U(r)$ электрона в водородоподобном атоме

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (8.1.1)$$

где Z – порядковый номер; r – расстояние до ядра.

- Энергия электрона E_n в атоме водорода и водородоподобного иона

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{Z^2 me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \qquad (8.1.2)$$

где (n = 1,2,3,4,……..) – главное квантовое число.

- Модуль орбитального момента импульса $\vec{L}_e$ электрона:

$$L_e = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \qquad (8.1.3)$$

где (l = 0,1,2,…,(n-1)) – орбитальное квантовое число.

- Связь между орбитальным моментом импульса $\vec{L}_e$ и орбитальным магнитным моментом $\vec{p}_m$

$$\vec{p}_m = -g\vec{L}_e = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}_e, \qquad (8.1.4)$$

где $\vec{p}_m$ – магнитный момент электрона на орбите; $g = \frac{e}{2m}$ – орбитальное гиромагнитное отношение; $\vec{L}_e$ – орбитальный момент импульса электрона; e – элементарный заряд; m_e – масса электрона.

- Модуль орбитального магнитного момента:

$$p_m = \frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{l(l+1)}. \qquad (8.1.5)$$

- Магнетон Бора (минимально возможный магнитный момент):

$$\mu_Б = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}274\cdot10^{-24}\ \text{Дж/Тл}, \qquad (8.1.6)$$

где $\hbar = 1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с – перечеркнутая постоянная Планка.

- Проекция момента импульса электрона на выделенное направление

$$L_{eZ} = \hbar m_l, \tag{8.1.7}$$

где ($m_l = -l, -(l-1), -(l-2), ..., 0, ..., (l-2), (l-1), l$) – (8.1.8)
магнитное квантовое число.

- Проекция магнитного момента на выделенное направление z

$$p_{mZ} = \frac{|e|\hbar}{2m_e} m_l = \mu_Б m_l. \tag{8.1.9}$$

- Правила отбора для квантовых чисел:

орбитального Δl

$$\Delta l = \pm 1; \tag{8.1.10}$$

магнитного Δm_l

$$\Delta m_l = 0, \pm 1. \tag{8.1.11}$$

- Модуль собственного момента импульса $\vec{L}_s$ электрона

$$L_s = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar, \tag{8.1.12}$$

где $s = 1/2$ – квантовое число, называемое *спиновым квантовым числом.*

- Проекция спина на выделенное направление z

$$L_{sz} = m_s \hbar, \tag{8.1.13}$$

где ($m_s = \pm 1/2$) – магнитное спиновое число.

- Связь между спином $\vec{L}_s$ и спиновым магнитным моментом $\vec{p}_{ms}$:

$$\vec{p}_{ms} = -g_s \vec{L}_s, \tag{8.1.14}$$

где $g_s = e / m_e$ – спиновое гиромагнитное отношение.

- Кратность вырождения состояний $Z(n)$:

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{l=n-1} 2(2l+1) = [2(n-1)+2] \cdot n = 2n^2. \tag{8.1.15}$$

- Волновая функция электрона атома водорода в основном состоянии:

$$\Psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}, \tag{8.1.16}$$

где

$$a = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{mc^2}. \tag{8.1.17}$$

- Минимальная длина волны сплошного (тормозного) рентгеновского излучения:

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} = \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{2\pi\hbar c}{eU}, \tag{8.1.18}$$

где c – скорость света в вакууме; $\omega_{\max}$, $\nu_{\max}$ – соответственно максимальная циклическая и обычная частота; U – разность потенциалов между электродами рентгеновской трубки.

- Частота характеристического рентгеновского излучения (закон Мозли):

$$\sqrt{\nu} = a(Z - <\sigma>), \tag{8.1.19}$$

где $a = \sqrt{Rc\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)}$.

Постоянная Ридберга:

$$R = \frac{m_e e^2}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}. \tag{8.1.20}$$

- Спектральная формула для длин волн линий спектра водородоподобных ионов:

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right). \tag{8.1.21}$$

- Спектральная формула для длин волн линий спектра атомов:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - <\sigma>)^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \tag{8.1.22}$$

где Z – порядковый номер элемента в таблице элементов Менделеева; $<\sigma>$ – средняя постоянная экранирования; n_1 – главное квантовое число состояния, на которое переходит электрон; n_2 – главное квантовое число состояния, с которого переходит электрон.

- Закон поглощения излучения веществом (формула Бугера):

$$I = I_0 e^{-\mu \cdot x}, \tag{8.1.23}$$

где μ – линейный коэффициент поглощения; I_0 – интенсивность излучения, падающего на пластинку; I – интенсивность излучения, прошедшего слой толщиной x.

- Массовый коэффициент поглощения:

$$\mu_м = \mu/\rho, \tag{8.1.24}$$

где ρ – плотность вещества.

- Энергия излучаемого фотона

$$h\nu = E_2 - E_1, \tag{8.1.25}$$

где E_2 – энергия состояния, с которого переходит атом; E_1 – энергия состояния на которое переходит атом; ν – частота излучения; h – постоянная Планка.

В этом разделе алгоритм решения задач находится непосредственно перед решением задачи.

8.1.2. Общие методические указания к решению задач

Квантовые числа, спектры излучения

В зависимости от значения орбитального квантового числа l состояния электрона в атоме записывают различными буквами. Значениям l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... соответствуют буквы s, *p, d, f, g, h,* ... (далее по алфавиту); перед ними указывают значение главного квантового числа n. Например, электрон в состоянии n = 2 и l = 1 обозначается символом *2p*.

Имеется много задач, в которых рассматриваются спектры водорода и водородоподобных ионов (т.е. ионов, имеющих по одному электрону: $\mathrm{He}^{+}, \mathrm{Li}^{++}$ и т. д.).

Чтобы с помощью формул (8.1.21), (8.1.22) найти длину волны λ (или частоту $\nu = c/\lambda$, или квант энергии $h\nu$), надо, прежде всего, исходя из условия задачи, определить числа n_1 и n_2, входящие в эти формулы.

Так, для водорода числу n_1 = 1 соответствует ультрафиолетовая серия (серия Лаймана); n_1 = 2 – видимая серия (серия Бальмера); n_1 = 3 – первая инфракрасная серия (серия Пашена); n_1= 4 – вторая инфракрасная серия (серия Брэкета); n_1= 5 – третья инфракрасная серия (серия Пфунда).

Число n_2 выражается формулой $n_2 = n_1 + N$, где N – номер спектральной линии в данной серии, взятый в порядке убывания длины волны.

Например, для второй линии серии Пашена n_1= 3, n_2 = 3 + 2 = 5.

Постоянная Ридберга

Постоянная Ридберга (см. (8.1.20)) вычислена в предположении, что в атоме водорода (или водородоподобного иона) электрон вращается вокруг *неподвижного* ядра. Это возможно лишь при условии, когда масса ядра бесконечно велика по сравнению с массой электрона. Поэтому постоянную Ридберга, определяемую по (8.1.20), часто обозначают через R_∞.

В действительности, электрон и ядро вращаются вокруг их общего центра масс, что приводит к несколько иному значению постоянной Ридберга. В самом деле, если умножить обе части формулы (8.1.21) на hc и сравнить ее с формулой (8.1.25), то получим

$$E_i = -\frac{RhcZ^2}{n_i^2},$$

т.е. при фиксированном числе n_i постоянная Ридберга оказывается пропорциональной полной энергии E_i атома.

Из законов механики следует, что между полной *действительной* энергией E атома и его полной энергией E_∞, вычисленной для неподвижного ядра, существует связь

$$E = \frac{E_\infty}{1 + m_e / M},$$

где M – масса ядра; m_e – масса электрона.

Поскольку величина R пропорциональна полной энергии атома, можно записать для точного значения постоянной Ридберга формулу:

$$R = \frac{R_\infty}{1 + m_e / M},$$

где $R_\infty = 1{,}097 \cdot 10^{-7}$ м$^{-1}$. Таким образом, величина R несколько различна для разных атомов.

Это обстоятельство надо учитывать в задачах на сравнение спектров различных атомов.

Закон Мозли

При вычислении частоты характеристических рентгеновских лучей по закону Мозли следует иметь в виду, что спектральные серии обозначаются теми же буквами, что и электронные слои, переход электронов на каждый из которых вызывает данное излучение. Например, K–серия обусловлена переходом электронов на K–слой. При этом сериям (электронным слоям) $K, L, M, N, \ldots$ соответствуют квантовые числа n, в формуле (8.1.19) равные 1, 2, 3, 4,…. Число n_2 по-прежнему определяется формулой $n_2 = n_1 + N$, где N – номер линии в данной серии. Линии серии записываются в порядке уменьшения длины волны индексами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Например, вторая линия K–серии обозначается K_β. В этом случае $n_1 = 1$, $n_2 = 1 + 2 = 3$.

Если для решения задачи надо знать величину постоянной экранирования $< \sigma >$, то руководствуются следующим: $< \sigma > = 1$ для линии K_α и $< \sigma > > 1$ для остальных линий K–серии. Однако при приближенных расчетах считают величину $< \sigma >$ одинаковой для всех линий одной и той же серии. Тогда $< \sigma > \approx 1{,}0$ для серии K и $< \sigma > \approx 7{,}5$ для серии L.

8.1.3. Алгоритм решения в разделе «Электронная конфигурация»

1. Выпишите полный набор квантовых чисел для указанных состояний.
2. Запишите формулы для расчета квантовых физических величин: модуля импульса, проекции импульса и т.д.
3. Получите систему уравнений для нахождения искомых величин.
4. Получите решение в общем виде.
5. Проведите вычисления.

8.1.4. Примеры решения задач в разделе «Электронная конфигурация»

<u>Пример 8.1.1.</u> Электронная конфигурация атома некоторого элемента имеет вид: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^1 4s^2$. Найдите отношение модуля магнитного момента одного из электронов, находящегося в состоянии 3*p*, к модулю спинового магнитного момента электрона в состоянии 3*d*. Атом какого элемента имеет указанную электронную конфигурацию?

Дано:
Электронная конфигурация:
$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^1 4s^2$.
Состояния 3*p* и 3*d*.

Определить: 1. $\dfrac{p_m}{p_{ms}} = ?$
2. Какой это элемент?

Решение

1. Модуль орбитального магнитного момента электрона определяется орбитальным квантовым числом l:

$$p_m = \frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{l(l+1)}\,. \qquad (1)$$

2. Модуль спинового магнитного момента зависит от спинового квантового числа s

$$p_{ms} = \frac{e\hbar}{m_e}\sqrt{s(s+1)} \,. \tag{2}$$

3. Найдем отношение магнитных моментов, т.е. решение в общем виде

$$\frac{p_m}{p_{ms}} = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2\sqrt{s(s+1)}} \,. \tag{3}$$

4. Орбитальное квантовое число 3p состояния равно l=1, спин электрона равен s=1/2. Найдем отношения магнитных моментов, подставив в формулу (3) указанные значения квантовых чисел:

$$\frac{p_m}{p_{ms}} = \frac{\sqrt{1(1+1)}}{2\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 0{,}82 \,.$$

5. Для того чтобы найти общее число электронов в оболочках, воспользуемся электронной конфигурацией. Верхний индекс в электронной конфигурации – это число электронов в данной оболочке. Суммируя индексы, найдем число электронов – 21, следовательно, порядковый номер элемента: $z = 21$. Это порядковый номер химического элемента скандия.

Ответ: 1). $\frac{p_m}{p_{ms}} = 0{,}82$.

2). Химический элемент – скандий.

8.1.5. Алгоритм решения в разделе «Волновая функция»

1. Установить, в каком квантовом состоянии находится валентный электрон.
2. Записать квантовые числа этого состояния.
3. Написать волновую функцию для данного состояния.
4. Найти вероятность обнаружения или среднее значение искомой физической величины в общем виде. Как правило, требуется взять интеграл.
5. Рассчитать искомую величину.
6. Записать окончательный результат.

8.1.6. Примеры решения задач в разделе «Волновая функция»

Пример 8.1.2. Атом водорода находится в основном состоянии. Найдите среднюю потенциальную энергию электрона в этом состоянии.

Дано: Основное состояние атома водорода.
Определить: $< U >=?$

Решение

1. Единственный электрон атома водорода занимает состояние с электронной конфигурацией $1s^1$. Данное квантовое состояние определяется набором квантовых чисел:
$$n=1,\ l=0,\ m_l=0.$$
2. Волновая функция основного состояния имеет вид
$$\Psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}, \tag{1}$$
где
$$a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{mc^2}, \tag{2}$$
m_e – масса электрона; e – электрический заряд электрона;
a –константа, соответствующая радиусу первой боровской орбиты.

3. Важным свойством волновой функции является то, что она позволяет находить средние значения физических величин в квантовой механике. Воспользуемся этим свойством и найдём среднее значение потенциальной энергии электрона:
$$< U >= \int_0^\infty U(r) \cdot \left|\Psi_{100}(r)\right|^2 4\pi r^2 dr\,. \tag{3}$$
4. Напишем формулу для потенциальной энергии электрона в поле ядра:
$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\,. \tag{4}$$

5. Объединим выражения (1), (3), (4)

$$< U >= \int_0^\infty (-1)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\cdot e^{-\frac{2r}{a}} 4\pi r^2 dr\,. \qquad (5)$$

6. Возьмем интеграл

$$< U >= -\frac{4e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\int_0^\infty r\cdot e^{-\frac{2r}{a}}dr = -\frac{4e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\cdot\frac{1!}{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\,. \qquad (6)$$

7. Подставим (2) в (6). После преобразований получим решение в общем виде

$$< U >= -\frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2}\,. \qquad (7)$$

8. Выполним расчет потенциальной энергии:

$$< U >= -\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}(1{,}6\cdot 10^{-19})^4}{(4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34})^2} = -43{,}710^{-19}\text{ Дж.}$$

9. Найдем потенциальную энергию в электрон-вольтах. Для этого поделим полученный результат на число $1{,}6\cdot 10^{-19}$. Вычисления дают следующий результат:

$$< U >= -27{,}4\text{ эВ.}$$

Ответ: Средняя потенциальная энергия электрона равна

$$< U >= -43{,}7\cdot 10^{-19}\text{ Дж},\ < U >= -27{,}4\text{ эВ.}$$

8.1.7. Алгоритм решения задач на закон Мозли

Сделать анализ условия задачи, т.е. выяснить: это водородоподобный ион или многоэлектронный атом?
Выписать порядковый номер элемента.
Написать закон Мозли или спектральную формулу.
Выяснить, какая серия излучения формируется.
Записать для неё квантовые числа.
Выписать для данной серии спектра излучения постоянную экранирования.
Получить решение в общем виде.
Провести расчет искомой величины (или величин).
Проверить, если это необходимо, единицы измерения найденной величины.
Записать ответ.

8.1.8. Примеры решения задач на закон Мозли

Пример 8.1.3. Какую наименьшую разность потенциалов U надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить все линии K–серии характеристического рентгеновского излучения, если в качестве материала антикатода используется вольфрам.

Дано:
W -вольфрам,
$Z = 74$,
K–серия.

Определить:
U =?

Решение

1. При бомбардировке вольфрама быстрыми электронами возникает рентгеновское излучение, имеющее линейчатый спектр. Быстрые электроны, проникая вглубь электронной оболочки атома, выбивают электроны, принадлежащие электронным слоям. Ближайший к ядру электронный слой (K–слой) содержит два электрона. Если хотя бы один из этих электронов оказывается выбитым за пределы атома, тогда на его место переходит электрон из вышележащих слоев (L,M,N). Соответствующие этим переходам линии образуют K–серию.

2. Электрон покинет пределы атома, если ему сообщить энергию, равную $h\nu = hc/\lambda$, где λ – длина волны, соответствующая переходу бесконечно удаленного электрона на K–оболочку. Эту энергию передает бомбардирующий электрон, прошедший разность потенциалов, равную eU.

3. Для минимально возможной энергии налетающего электрона выполняется равенство

$$hc/\lambda = eU. \qquad (1)$$

4. Запишем закон Мозли в модифицированном виде:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - <\sigma>)^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \qquad (2)$$

здесь $n_1 = 1$ – главное квантовое число K–оболочки; $n_2 = \infty$ – главное квантовое число, соответствующее свободному электрону.

5. Постоянная экранирования для K–серии равна $< \sigma >= 1{,}1$.

6. Объединим формулы (1), (2) и найдем решение в общем виде

$$U = \frac{Rhc}{e}(Z - < \sigma >)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \qquad (3)$$

7. Произведем вычисления, подставив численные значения в выражение (3)

$$U = \frac{1{,}097 \cdot 10^7 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}(74 - 1{,}1)^2 \left(\frac{1}{(1)^2} - \frac{1}{(\infty)^2} \right) = 7236 \text{ В}.$$

8. Проверим единицу измерения

$$[U] = \left[\frac{\text{м}^{-1} \cdot \text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{Кл}} \right] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \right] = [\text{В}].$$

Ответ: $U = 72{,}4$ кВ.

8.1.9. Алгоритм решения задач в разделе «Поглощение излучения веществом»

1. Записать закон Бугера.
2. Сделать необходимые преобразования с целью выделения искомой величины. Фактически будет найдено решение в общем виде.
3. По определению величины, а также используя необходимые таблицы, найти вспомогательную величину.
4. Подставить значение найденной величины в общее решение.
5. Рассчитать искомую величину.
6. Записать окончательный результат.

8.1.10. Пример решения задачи в разделе «Поглощение излучения веществом»

Пример 8.1.4. Пучок γ –лучей с длиной волны 0,69пм падает на поверхность воды. На какой глубине интенсивность лучей уменьшится в 90 раз?

Дано:	СИ
λ =0,69 пм,	$0{,}69\cdot10^{-12}$ м
k = 90.	
Определить: X = ?	

Решение

1. Ослабление интенсивности излучения подчиняется закону Бугера:

$$I = I_0 e^{-\mu\cdot x}. \qquad (1)$$

2. Воспользуемся этим законом (1) и найдем отношение интенсивностей

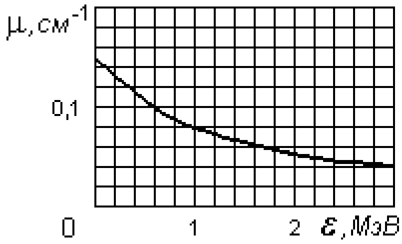
$$\frac{I_0}{I} = e^{\mu\cdot x}, \qquad (2)$$

где I_0 – интенсивность падающего излучения; I – интенсивность излучения на глубине X; μ – линейный коэффициент поглощения.

3. Решим это уравнение относительно коэффициента поглощения μ:

$$\ln k = \mu \cdot x,$$

$$x = \ln k/\mu. \qquad (3)$$



4. Найдем линейный μ коэффициент поглощения, который зависит от энергии ε падающих фотонов. Для этого нужно воспользоваться графиком.

5. Выразим энергию фотона через его длину волны:

$$\varepsilon = hc/\lambda. \qquad (4)$$

6. Найдем энергию фотона по формуле (4):

$$\varepsilon = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{0{,}69 \cdot 10^{-12}} = 2{,}88 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

7. Выразим энергию в МэВ

$$\varepsilon = 1{,}8 \text{ МэВ}.$$

8. Определим по графику линейный коэффициент поглощения:

$$\mu = 0{,}058 \text{ см}^{-1}.$$

9. Вычислим толщину поглощающего слоя, подставив в формулу (3) найденное значение линейного коэффициента поглощения

$$x = \frac{\ln 90}{0{,}058} = 77{,}6 \text{ см}.$$

Ответ: $x = 77{,}6$ см.

8.1.11. Задачи для самостоятельного решения (домашние задачи)

Пример 8.1.5. Определить энергию ε фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на основной уровень. Вычислить первый потенциал возбуждения φ_1.

Ответ: $\varepsilon = 12{,}1$ эВ,
$\varphi_1 = 10{,}2$ В.

Пример 8.1.6. Энергия связи электрона в основном состоянии атома гелия равна $E_0 = 24{,}6$ эВ. Найти энергию, необходимую для удаления обоих электронов из этого атома.

Ответ: $E = 79$ эВ.

Пример 8.1.7. У какого водородоподобного иона разность длин волн между головными линиями серии Бальмера и Лаймана равна 59,3 нм?

Ответ: У водородоподобного иона лития Li^{++}.

Пример 8.1.8. Какую наименьшую энергию E_{min} должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел три спектральные линии? Найти длины волн этих линий.

Ответ: $E_{\min} = 1{,}94 \cdot 10^{-18}$Дж; $\lambda_1 = 121$ нм;

$\lambda_2 = 103$ нм; $\lambda_3 = 656$ нм.

Пример 8.1.9. При переходе электрона в атоме с *M*– на *K*–оболочку испускается излучение с длиной волны λ = 67,24 пм. Какой это атом? Положить для *K*–серии постоянную экранирования $< \sigma > = 1$.

Ответ: Цирконий ($Z = 40$).

Пример 8.1.10. Найти для алюминия толщину слоя половинного ослабления узкого пучка монохроматического рентгеновского излучения, если соответствующий массовый показатель ослабления $\mu/\rho = 0{,}32$ см^2/г.

Ответ: d = 8 мм.

8.2. Элементы физики твердого тела

8.2.1. Основные понятия, формулы и законы

Квантовые статистики

- Единая формула для функции заполнения ячеек $f = \dfrac{n_i}{g_i}$ фазового пространства:

$$f = \frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(W_i - \mu)} \pm 1}. \qquad (8.2.1)$$

Знак «минус» в формуле (8.2.1) соответствует статистике Бозе-Эйнштейна, «плюс» – статистике Ферми-Дирака.

- Химический потенциал μ. При абсолютном нуле температуры в статистике Ферми – Дирака равен энергии Ферми E_F.

Электронная теория металлов

- Распределение свободных электронов в металле по энергиям при абсолютном нуле:

$$dn(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot E^{1/2}dE, \qquad (8.2.2)$$

где $dn(E)$ – концентрация электронов с энергией, заключенной в пределах от E до $E + dE$, m_e – масса электрона. Это выражение справедливо, если $E < E_F$ (где E_F – энергия или уровень Ферми).

- Энергия Ферми в металле при температуре $T = 0$:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}, \qquad (8.2.3)$$

где n – концентрация электронов в металле.

- Температура Ферми

$$T_F = \frac{E_F(0)}{k}. \qquad (8.2.4)$$

- Теплоемкость электронного газа

$$C_{ЭЛ} \approx C_{КЛАССИЧ} \frac{T}{T_F}. \qquad (8.2.5)$$

- Эффективная масса электрона

$$m^* = \frac{\hbar^2}{d^2E/dk^2}. \qquad (8.2.6)$$

Полупроводники

- Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = en\left(b_n + b_p\right), \qquad (8.2.7)$$

где e – элементарный заряд; n – концентрация носителей тока электронов и дырок; b_n и b_p – подвижности электронов и дырок соответственно.

- Напряжение на гранях прямоугольного образца при эффекте Холла, холловская разность потенциалов

$$U_H = R_H Bja, \qquad (8.2.8)$$

где R_H – постоянная Холла; B – магнитная индукция; j – плотность тока; a – ширина пластины (образца).

- Постоянная Холла для полупроводников типа алмаз, германий, кремний и др., обладающих носителями тока одного вида (n или p)

$$R_H = \frac{3\pi}{8}\frac{1}{en}, \qquad (8.2.9)$$

где n – концентрация носителей тока.

- Удельная проводимость полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 \cdot e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}, \qquad (8.2.10)$$

где γ_0 – константа, слабо меняющаяся с температурой; T – температура; ΔE – ширина запрещенной зоны (энергия активации); k – постоянная Больцмана.

- Температурный коэффициент сопротивления полупроводников

$$\alpha = \frac{d\rho}{\rho dT}; \qquad \alpha = \frac{\Delta E}{2kT^2}, \qquad (8.2.11)$$

где ρ – удельное сопротивление полупроводника.

Квантовая теория теплоемкости

- Энергия гармонического осциллятора

$$\varepsilon_n = (\upsilon + \frac{1}{2}) \cdot \hbar\omega . \qquad (\upsilon = 0,\ 1,\ 2,\ ...), \qquad (8.2.12)$$

где υ – колебательное квантовое число, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ – перечёркнутая постоянная Планка, ω – циклическая частота колебаний

- Средняя энергия колебания

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \cdot \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \qquad (8.2.13)$$

здесь и далее k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура

- Теплоемкость кристалла в теории Эйнштейна

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3N\hbar\omega}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1\right)^2} \cdot e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \cdot \frac{\hbar\omega}{kT^2}, \qquad (8.2.14)$$

где U – внутренняя энергия, N – число атомов.

- Максимальная частота нормальных колебаний

$$\omega_m = u \cdot \sqrt[3]{6\pi^2 n} . \qquad (8.2.15)$$

где n – концентрация атомов, u – фазовая скорость волны в кристалле.

- Наименьшая длина волны, возбуждаемая в кристалле:

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi u}{\omega_m} \approx \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \approx 2d . \qquad (8.2.16)$$

где d – расстояние между соседними атомами в решетке.

- Внутренняя энергия

$$U = U_0 + \frac{9n\hbar}{\omega_m^3} \int_0^{\omega_m} \cdot \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \qquad (8.2.17)$$

- Энергия нулевых колебаний кристалла

$$U_0 = \frac{9n\hbar\omega_m}{8} . \qquad (8.2.18)$$

- Характеристическая температура Дебая

$$T_D = \frac{\hbar\omega_m}{k} . \qquad (8.2.19)$$

- Выражение для теплоемкости примет вид

$$C = 9nk\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \cdot \int_0^{x_m} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}. \qquad (8.2.20)$$

- В формуле (8.2.20) $x = \hbar\omega / kT$, а $x_m = \hbar\omega_m / kT = T_D / T$.

8.2.2. Общие методические указания

Квантовые статистики

Основной задачей физической статистики является подсчет числа состояний, занимаемых системой.

При решении задач на квантовые статистики следует иметь в виду, что:

- квантовые частицы принципиально неразличимы;
- они обладают собственными механическими моментами ─ спинами. Спин характеризуется квантовым числом S;
- частицы с полуцелым спином называются фермионами и к ним применима квантовая статистика Ферми-Дирака;
- частицы с целым спином называются бозонами и к ним применима квантовая статистика Бозе-Эйнштейна;
- для частиц с полуцелым спином необходимо учитывать принцип Паули: в одном квантовом состоянии может находиться только одна частица.

Приступая к решению задачи, выясните – в каком состоянии – вырожденном или невырожденном находится газ. Помните, что увеличение числа частиц в системе отдаляет переход вырожденного газа в невырожденный газ. Критерием является соотношение между числом возможных состояний и числом частиц в системе:

- если число возможных состояний больше числа частиц, такая система представляет собой невырожденный газ;
- если число частиц в системе соизмеримо с числом состояний, система называется вырожденной. Характерный признак такой системы – в процессах возбуждения участвует только небольшая часть частиц, принадлежащих системе.

Электроны в металле – типичный пример вырожденного газа. Поскольку они имеют полуцелый спин, на них распространяется принцип Паули, в соответствии с которым на каждом уровне находится только один электрон. При абсолютном нуле (T = 0 К) последним энергетическим уровнем окажется уровень с энергией $E_{МАК}$, соответствующей максимальной кинетической энергии электрона. Эта энергия называется энергией Ферми E_F. Энергия Ферми определяет температуру вырождения T_F электронного газа в металлах $kT_F = E_F$.

Энергетический спектр электронов в металле дискретный: на единичный интервал энергий приходится конечное число состояний, хотя их число невероятно велико. Такой энергетический спектр называется квазинепрерывным.

Тепловые свойства твердых тел

При решении задач необходимо учитывать следующее:

- В квантовой теории теплоемкости рассматривается коллективное движение всех частиц кристалла. Оно носит характер стоячих механических волн, их называют нормальными колебаниями. Нормальное колебание можно представить как гармонический осциллятор с соответствующими атрибутами: частотой ν, массой m, энергией $E_{\vartheta} = \left(\upsilon + \frac{1}{2}\right)h\nu$, где $\upsilon = 0,1,2,........$
- Тепловое возбуждение нормального осциллятора рассматривается в квантовой теории теплоемкости как возникновение квазичастиц, получивших название фононов. Спин фононов равен нулю. Они являются бозонами и подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. Химический потенциал для системы бозонов равен нулю ($\mu = 0$).
- В кристалле возникают колебания, максимальная частота которых ω_D, определяемая межатомным расстоянием в кристалле d или, другими словами, видом вещества.
- Характеристическая температура Дебая Θ_D определяется условием $\hbar\omega_D = k\Theta_D$, где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – перечеркнутая постоянная Планка. Она определяет интервал температур, в котором колебания атомов в кристалле становятся независимыми, а следовательно, справедлива классическая теория теплоемкости твердых тел, т.е. выполняется закон Дюлонга и Пти.
- Приступая к решению задач необходимо выяснить, какая теория справедлива: квантовая ($T < \Theta_D$) или классическая ($T > \Theta_D$).
- Если твердое тело – металл, теплоемкость электронного газа можно не учитывать, поскольку при температурах, определяемых условием ($T_F > T > \Theta_D$), в тепловом движении участвует лишь незначительная часть электронов.
- Если необходимо выполнить точные расчеты, разумно воспользоваться формулой для соотношения молярных

теплоемкостей электронного газа – $C_{эл}$ и теплоемкости решетки – $C_{реш}$:

$$\frac{C_{эл}}{C_{реш}} = \frac{3}{2}\frac{kT}{E_F}.$$

Полупроводники

- Решая задачи в разделе – «Полупроводники» нужно помнить, что носители электрического тока в полупроводниках подчиняются классической статистике, так как концентрация их мала.
- В собственных полупроводниках при любой температуре концентрации электронов и дырок равны.
- В примесных полупроводниках соотношение следующее: в полупроводнике n - типа доминируют электроны, а p - типа - дырки.
- Проводимость любого полупроводника обусловлена и тем и другим типом носителей.

8.2.3. Алгоритм решения задач в разделе «Электронная теория металлов»

1. Выяснить, действительно ли носители электрического заряда находятся в вырожденном состоянии.
2. Выписать соответствующие формулы для расчета: энергии Ферми, концентрации носителей, плотности электронных состояний и т. д.
3. В большинстве задач требуется вычислить определенный интеграл.
4. Прежде чем это сделать, перейдите к одной переменной и найдите пределы интегрирования.
5. Возьмите интеграл.
6. Проведите вычисления.
7. Запишите ответ.

8.2.4. Примеры решения задач в разделе «Электронная теория металлов»

Пример 8.2.1. Полагая, что средняя энергия электрона равна 3/5 энергии Ферми, оцените давление электронного газа в металле. Расчет провести для алюминия.

Дано:

$$<\varepsilon> = \frac{3}{5}E_F$$

Определить:

$p = ?$

Решение

1. Давление электронного газа находим, воспользовавшись основным уравнением молекулярно-кинетической теории

$$p = \frac{2}{3} n < \varepsilon > , \qquad (1)$$

где n – концентрация частиц; $< \varepsilon >$ – средняя энергия движения одной частицы.

2. Энергия Ферми и концентрация электронов связаны между собой соотношением

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}, \qquad (2)$$

где m_e – масса электрона; n – концентрация электронов.

3. Концентрация электронов в алюминии в три раза больше концентрации атомов, поскольку валентность алюминия равна 3. Концентрацию атомов алюминия найдем по формуле

$$n = \rho \frac{N_A}{A}, \qquad (3)$$

где ρ – плотность алюминия; N_A – число Авогадро; A – атомная масса.

4. Подставим (3) в (2), а затем (2) в (1), с учетом условия задачи получим

$$p = \frac{2}{3}\rho\frac{N_A}{A}\frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\rho\frac{N_A}{A}\right)^{2/3} = \frac{\rho\hbar^2}{5m}\frac{N_A}{A}\left(3\pi^2\rho\frac{N_A}{A}\right)^{2/3}.$$

Эта формула – решение в общем виде.

5. Произведем вычисления. Из таблицы выпишем плотность алюминия ρ =2700 кг/м^3. Атомная масса алюминия равна A =27·10^{-3}кг/моль.

$$p = \frac{2{,}7\cdot10^3\cdot(1{,}05\cdot10^{-34})^2}{5\cdot9{,}1\cdot10^{-31}}\frac{6{,}02\cdot10^{23}}{2{,}7\cdot10^{-2}}\times$$

$$\times\left(3(3{,}14)^2\frac{2{,}7\cdot10^3\cdot6{,}02\cdot10^{23}}{2{,}7\cdot10^{-2}}\right)^{2/3} = 1{,}34\cdot10^{11}\,\text{Па}.$$

Ответ: p =1,34·10^{11} Па.

<u>Пример 8.2.2.</u> Кусок металла (медь) объемом $V = 20$ м^3 находится при температуре $T = 0$ К. Определить: 1) максимальную энергию E_F (энергию Ферми), которую могут иметь свободные электроны в металле при $T = 0$, приняв, что на каждый атом меди приходится по одному электрону; 2) число Δn свободных электронов, энергии которых заключены в интервале от

$0{,}9E_F$ до E_F; 3) среднюю кинетическую энергию $<\varepsilon>$ свободных электронов.

Дано:	СИ
V =20 см^3,	$20\cdot10^{-6}$м^3
T =0 К,	
$E=(0{,}9E_F \div E_F)$.	
Определить: E_F=?, Δn=?, $<\varepsilon>$=?.	

Решение

1. Максимальная кинетическая энергия E_F, которую могут иметь электроны в металле при абсолютном нуле, связана с концентрацией свободных электронов соотношением

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}, \qquad (1)$$

где $\hbar$ – перечеркнутая постоянная Планка; m_e – масса электрона.

2. Концентрация свободных электронов по условию задачи равна концентрации атомов, которая может быть найдена по формуле

$$n=\rho\frac{N_A}{A}, \qquad (2)$$

где ρ – плотность меди; N_A – число Авогадро; A – атомная масса.

3. Подставляя выражение концентрации в формулу (1), получим решение в общем виде для энергии Ферми

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2\rho\frac{N_A}{A}\right)^{2/3}. \qquad (3)$$

Подставив числовые значения, произведем вычисления и тем самым найдем энергию Ферми:

$$E_F = \frac{\left(1{,}05\cdot10^{-34}\right)^2}{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}}\left[3\cdot3{,}14^2\cdot8{,}9\cdot10^3\cdot\frac{6{,}02\cdot10^{23}}{64\cdot10^{-3}}\right]^{2/3}\text{Дж} =$$

$$=1{,}18\cdot10^{-18}\,\text{Дж}=7{,}4\ \text{эВ}.$$

4. Число электронов в единице объема, энергии которых заключены в интервале от $0{,}9E_F$ до E_F, найдем интегрированием

$$\Delta n=\int\limits_{0,9E_F}^{E_F}\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}E^{1/2}dE=\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int\limits_{0,9E_F}^{E_F}E^{1/2}dE=$$

$$=\frac{1}{6\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}E^{3/2}\Big|_{0,9E_F}^{E_F}=\frac{1}{6\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left(E_F^{3/2}-0,9E_F^{3/2}\right)=$$

$$=\frac{0,1}{6\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}E_F^{3/2}=\frac{0,1}{6\pi^2}\left(\frac{2m_eE_F}{\hbar^2}\right)^{3/2}.$$

Мы получили решение в общем виде.

5. Подставим числовые значения и получим концентрацию электронов, энергии которых заключены в интервале энергий от $0,9E_F$ до E_F:

$$\Delta n=\frac{0,1}{6\cdot 3,14^2}\left(\frac{2\cdot 9,1\cdot 10^{-31}\cdot 1,18\cdot 10^{-18}}{\left(1,05\cdot 10^{-34}\right)^2}\right)^{3/2}\text{эл}/\text{м}^3=$$

$$=6,83\cdot 10^{27}\ \text{эл}/\text{м}^3.$$

6. Для определения средней кинетической энергии $dn(E)$ свободных электронов воспользуемся известным соотношением

$$<\varepsilon>=\frac{1}{n}\int\limits_0^{E_{Ff}}Edn(E).$$

7. Подставив функциональную зависимость $dn(E)$ и выполнив преобразования, получим:

$$<\varepsilon>=\frac{1}{n}\int\limits_0^{E_F}E\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}E^{1/2}dE=\frac{1}{2\pi^2 n}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int\limits_0^{E_F}E^{3/2}dE=$$
$$=\frac{1}{2\pi^2 n}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{E_F^{5/2}\cdot 2}{5}=\frac{1}{5\pi^2 n}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot E_F^{5/2}. \qquad (4)$$

8. Учтем, что $E_F=\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}$. Перепишем эту формулу в виде

$$\frac{E_F}{\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}}=\frac{\hbar^2}{2m_e}. \qquad (5)$$

9. Объединим (5) с выражением (4), получим решение в общем виде для средней энергии электронов:

$$<\varepsilon>=\frac{1}{5\pi^2 n}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot E_F^{5/2}=\frac{1}{5\pi^2 n}\frac{3\pi^2 n}{E_F^{3/2}}\cdot E_F^{5/2}=\frac{3}{5}E_F. \qquad (6)$$

10. Подставим в (6) численное значение энергии Ферми и получим среднее значение энергии:

$$<\varepsilon>=\frac{3}{5}\cdot 7{,}4=4{,}44 \text{ эВ}.$$

Ответ: 1) $E_F = 7{,}4$ эВ;

2) $\Delta n = 6{,}83\cdot 10^{27}$ эл/м^3;

3) $<\varepsilon>= 4{,}44$ эВ.

8.2.5. Алгоритм решения задач в разделе «Зонная теория полупроводников»

Выяснить, какой полупроводник: собственный или примесный.

Для примесного проводника определить тип проводимости: электронная или дырочная.

Записать формулы для расчета электропроводности. Обычно используется формула температурной зависимости удельной проводимости.

При определении подвижности носителей необходимо выписать только требуемую формулу.

Дополнить указанные выше основные соотношения дополнительными формулами и законами, например, по эффекту Холла, внутреннему фотоэффекту и т.д.

Получить решение в общем виде.

Провести вычисления.

Записать ответ.

8.2.6. Примеры решения задач в разделе «Зонная теория полупроводников»

Пример 8.2.3. Рассчитать ширину запрещенной зоны ΔE носителей тока в теллуре, если при нагревании от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К его проводимость возрастает в $\eta = 5$ раз.

Дано:

T_1=300 К,

T_2=400 К,

$\eta = 5$.

Определить:
ΔE =?

Решение

1. Теллур является полупроводником, его собственная проводимость γ зависит от температуры T по закону

$$\gamma = \gamma_0 \cdot e^{-\Delta E/2kT}, \tag{1}$$

где γ_0 – величина, слабо меняющаяся с температурой; ΔE – ширина запрещенной зоны; k – постоянная Больцмана.

2. Используя соотношение (1), запишем проводимость теллура при температурах T_1 и T_2:

$$\gamma_1 = \gamma_0 \cdot e^{-\Delta E/2kT_1}; \tag{2}$$

$$\gamma_2 = \gamma_0 \cdot e^{-\Delta E/2kT_2}. \tag{3}$$

3. Разделив выражение (3) на (2), имеем:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = e^{\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}. \tag{4}$$

4. После логарифмирования

$$\ln\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right). \tag{5}$$

5. Найдем ширину запрещенной зоны из выражения (5), т.е. получим решение в общем виде:

$$\Delta E = 2k\frac{T_1 \cdot T_2}{T_2 - T_1}\ln\frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \tag{6}$$

6. Рассчитаем ширину запрещенной зоны:

$$\Delta E = 2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot \frac{300 \cdot 400}{400 - 300}\ln 5 =$$

$$= 0{,}53 \cdot 10^{-19}\,\text{Дж} = 0{,}33\ \text{эВ}.$$

Ответ: $\Delta E = 0{,}33$ эВ.

8.2.7. Алгоритм решения задач в разделе «Квантовая теория теплоёмкости»

Выяснить, в каком приближении следует решить задачу: теория Эйнштейна или теория Дебая.
Выписать соответствующие формулы: для внутренней энергии, теплоемкости теплоты и т.д.
В большинстве случаев решение предполагает интегрирование, следовательно, необходимо перейти к одной переменной и установить пределы интегрирования.
Вычислить определенный интеграл, получив тем самым решение в общем виде.
Если указана температура относительно температуры Дебая, достаточно воспользоваться готовыми формулами.
Провести вычисления.
Записать ответ.

8.2.8. Примеры решения задач в разделе «Квантовая теория теплоёмкости»

Пример 8.2.4. Определить теплоту Q, необходимую для нагревания кристалла меди массой m =50 г от T_1 =15 К до T_2 =25 К. Характеристическая температура Дебая для меди T_D =440 К. Считать условие $T_2 << T_D$ выполнимым.

Дано:	СИ
m =50 г,	50 10^{-3} кг
T_1 =15 К,	
T_2 =25 К,	
T_D =440 К,	
$T_2 << T_D$.	
Определить: Q =?	

Решение

1. Теплоту, необходимую для нагревания тела от температуры T_1 до температуры T_2, можно вычислить по формуле

$$Q = m\int_{T_1}^{T_2} c dT, \qquad (1)$$

где m – масса тела; c – удельная теплоемкость.
2. Выразим удельную теплоемкость через молярную теплоемкость

$$c = C/\mu. \qquad (2)$$

3. Подставляя (2) в (1), получим

$$Q = \frac{m}{\mu}\int_{T_1}^{T_2} C dT. \qquad (3)$$

4. Если условие $T_2 << T_D$ выполняется, молярную теплоемкость в теории Дебая можно определить по предельному закону

$$C = \frac{12\pi^4}{5} R\left(\frac{T}{T_D}\right)^3, \qquad (4)$$

где $R = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная; T_D –характеристическая температура Дебая; T – термодинамическая температура.

5. Подставим (4) в (3), а затем возьмем интеграл:

$$Q = \frac{12\pi^4}{5}\frac{m}{\mu} R\int_{T_1}^{T_2}\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 dT = \frac{3\pi^4}{5}\frac{m}{\mu}\frac{R}{T_D^3}(T_2^4 - T_1^4). \qquad (5)$$

6. Выражение (5) – решение в общем виде.

7. Произведем вычисления:

$$Q = \frac{3\cdot(3{,}14)^4}{5}\frac{5\cdot 10^{-2}}{64\cdot 10^{-3}}\frac{8{,}31}{440^3}[(25)^4 - (15)^4] = 0{,}015 \text{ Дж.}$$

Ответ: $Q = 0{,}015$ Дж.

8.2.9. Задачи для самостоятельного решения

<u>Пример 8.2.5.</u> Вычислить интервал (в электрон-вольтах) между соседними уровнями ΔE свободных электронов в металле при T = 0 К вблизи уровня Ферми, если концентрация свободных электронов n =2,0·10^{22} см$^{-3}$ и объем металла V =1,0 см^3.

Ответ: ΔE =2,0·10^{-22} эВ.

<u>Пример 8.2.6</u>. При очень низких температурах красная граница фотопроводимости чистого беспримесного германия λ_K =1,7 мкм. Найти температурный коэффициент сопротивления α данного германия при комнатной температуре.

Ответ: α = –0,05 К$^{-1}$.

<u>Пример 8.2.7</u>. Можно ли считать температуры T_1=20 К и T_2 =30 К низкими для железа, теплоемкость которого при этих температурах равна $(C)_1$ =0,226 Дж/(моль·К) и $(C)_2$ =0,760 Дж/(моль·К)?

Ответ: Да.

<u>Пример 8.2.8</u>. Вычислить энергию нулевых колебаний, приходящуюся на один грамм меди, дебаевская температура которой Θ_D =330 К.

Ответ: U_0=48,6 Дж/г.

<u>Пример 8.2.9</u>. Удельная проводимость γ кремния с примесями равна 112 См/м. Определить подвижность b_p дырок и их концентрацию n_p, если постоянная Холла R_H = 3,65·10^{-4} м^3/Кл. Принять, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью.

Ответ: b_p = 3,5·10^{-2} м^2/(В·с); n_p = 2·10^{22} м$^{-3}$.

<u>Пример 8.2.10</u>. Период d решетки одномерного кристалла (кристалла, атомы которого образуют цепи, не взаимодействующие друг с другом) равен 0,3 нм. Определить максимальную энергию ε_{MAK} фононов, распространяющихся вдоль этой цепочки атомов. Усредненная скорость звука в кристалле равна V=5 км/с.

Ответ: ε_{MAK} =1,1·10^{-21} Дж.

8.3. Элементы физики атомного ядра

8.3.1. Основные понятия, формулы и законы

Полная энергия, энергия связи, удельная энергия связи

- Полная энергия релятивистской частицы

$$E = m_0 c^2 + T . \qquad (8.3.1)$$

- Согласно закону сохранения полной релятивистской энергии,

$$\sum m_0 c^2 + \sum T = \sum m_0' c^2 + \sum T' , \qquad (8.3.2)$$

где $\sum m_0 c^2$ и $\sum m_0' c^2$ – сумма энергий покоя частиц соответственно до и после реакции, а $\sum T$ и $\sum T'$ – сумма их кинетических энергий до и после реакции.

- Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{CB} = c^2 \{[Zm_p + (A - Z)m_n] - m_Я\} , \qquad (8.3.3)$$

где c – скорость света в вакууме; m_p – масса протона; m_n – масса нейтрона; Z – порядковый номер элемента; A – массовое число; $n_Я$ – масса ядра.

- Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{CB} = c^2 \{[Zm_H + (A - Z)m_n] - m_A],\qquad (8.3.4)$$

где m_H – масса атома водорода; m_A – масса атома. Эта формула удобнее, чем (8.3.1), так как в таблицах обычно даются массы атомов.

- Дефект массы:

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_Я . \qquad (8.3.5)$$

Во внесистемных единицах энергия связи ядра равна

$$E_{CB} = 931{,}5 \cdot \Delta m ,$$

где Δm – дефект массы в «а.е.м.»; $931{,}4$ – коэффициент пропорциональности

(1 а.е.м = 931,5 МэВ).

- Удельная энергия связи:

$$\delta E_{CB} = E_{CB} / A . \qquad (8.3.6)$$

Кинетический закон радиоактивного распада

- Основной закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{8.3.7}$$

где N – число ядер, не распавшихся к моменту времени t; N_0 – число ядер в начальный момент ($t = 0$); λ – постоянная радиоактивного распада.

- Число ядер, распавшихся за время t:

$$\Delta N = N - N_0 = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right). \tag{8.3.8}$$

- В случае, если промежуток времени Δt, за который определяется число распавшихся ядер, много меньше периода полураспада $T_{1/2}$, то число распавшихся ядер можно определить по формуле

$$\Delta N = \lambda N \Delta t. \tag{8.3.9}$$

- Число ядер $N_2(t)$ дочернего изотопа изменяется с течением времени по закону

$$N_2(t) = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}), \tag{8.3.10}$$

где λ_1 и λ_2 – соответственно постоянная радиоактивного распада (материнского) исходного и (дочернего) конечного радиоактивного препарата; $N_1(0)$ – число ядер материнского изотопа в момент времени $t = 0$.

- Зависимость периода полураспада от постоянной радиоактивного распада:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \tag{8.3.11}$$

- Среднее время жизни τ радиоактивного ядра, т.е. промежуток времени, за который число не распавшихся ядер уменьшается в e раз:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \tag{8.3.12}$$

- Число N атомов, содержащихся в радиоактивном изотопе:

$$N = \frac{m}{\mu}N_A, \tag{8.3.13}$$

где m – масса изотопа; μ – молярная масса; N_A – число Авогадро.

Активность радиоактивного препарата

- Активность *A* радиоактивного изотопа:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N, \qquad (8.3.14)$$

или

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \qquad (8.3.15)$$

где dN – число ядер, распадающихся за интервал времени dt;

N - число радиоактивных атомов в момент времени *t*, N_0 - число радиоактивных атомов в начальный момент времени (*t=0*), A_0 – активность изотопа в начальный момент времени.

- Удельная активность изотопа:

$$a = A/m. \qquad (8.3.16)$$

m - масса препарата.

- Интенсивность I узкого пучка монохроматических γ –лучей, прошедших сквозь слой вещества толщиной x, уменьшается по закону

$$I = I_0 e^{-\mu \cdot x}, \qquad (8.3.17)$$

где I_0 – интенсивность излучения, падающего на слой; μ – линейный коэффициент ослабления вещества.

Энергия ядерной реакции

- Энергия ядерной реакции:

$$Q = c^2\left[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)\right], \qquad (8.3.18)$$

где m_1 и m_2 – массы покоя ядра-мишени и бомбардирующей частицы; $(m_3 + m_4)$ – сумма масс покоя ядер продуктов реакции.

- При числовом подсчете энергии атомной реакции массы ядер удобно заменить массами нейтральных атомов, выраженных в атомных единицах массы (а.е.м.), а энергию ядерной реакции вычислять во внесистемных единицах (МэВ). При этом коэффициент пропорциональности определяется по формуле, $c^2 = 931{,}5$ МэВ/(а.е.м.) где c – скорость света в вакууме.

8.3.2. Общие методические указания

Ядерные реакции

Решение задач на ядерные реакции основано на применении законов сохранения: 1) электрического заряда, 2) суммарного числа нуклонов, 3) энергии, 4) импульса.

Первые два закона позволяют правильно записывать ядерные реакции даже в тех случаях, когда одна из частиц – участников реакции или ее продуктов – не дана. Записав реакцию, мы тем самым определяем неизвестную частицу.

С помощью вторых двух законов находят кинетические энергии частиц – продуктов реакции, а также направления их разлета.

Процесс столкновения бомбардирующей частицы с ядром – мишенью, при котором частица поглощается ядром, рассматривают как *неупругий удар* и применяют при этом закон сохранения импульса, как и в соответствующих задачах механики.

В законе сохранения энергии, записанном для ядерных реакций, под полной энергией подразумевается полная *релятивистская* энергия, определяемая формулой $E = mc^2$.

Эта энергия mc^2 равна сумме энергии покоя частицы m_0c^2 и ее кинетической энергии T.

Согласно закону сохранения полной релятивистской энергии,

$$\sum m_0c^2 + \sum T = \sum m_0'c^2 + \sum T',$$

где $\sum m_0c^2$ и $\sum m_0'c^2$ – сумма энергий покоя частиц соответственно до и после реакции, а $\sum T$ и $\sum T'$ – сумма их кинетических энергий до и после реакции.

Поскольку в справочных таблицах приводятся значения масс атомов, а не ядер, то удобнее вычислять энергию связи ядра через массу атома водорода и массу данного атома.

При вычислении энергии реакции Q также заменяют массы покоя ядер массами атомов. Эта замена не влияет на величину разности, стоящей в скобках, так как уменьшаемое и вычитаемое при этом возрастают на одну и ту же величину.

Обычно при ядерных реакциях энергия Q измеряется величинами порядка 10 МэВ, а энергия покоя даже самого легкого ядра – ядра водорода ${}_1^1\mathrm{H}$ (т. е. протона) - равна 938 МэВ. Отсюда следует, что, вычисляя скорости частиц – ядер или отдельных нуклонов, их можно заведомо считать классическими в следующих случаях:

- если данные частицы являются продуктами ядерной реакции, вызванной столкновением медленных частиц;
- если речь идет об определении порога реакции.

Энергия ядерной реакции, как правило, превышает энергию покоя легких частиц – электронов и позитронов, равную 0,511 МэВ. Поэтому, находя скорости или импульсы этих частиц (если они являются продуктами реакции), следует пользоваться релятивистскими формулами.

Радиоактивность

Решая задачи на явление радиоактивности, следует различать два случая:

- Радиоактивный распад *изолированного* вещества.
  В этом случае используют закон радиоактивного распада в форме
  $$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$
- Если из условия задачи следует, что время распада Δt пренебрежимо мало по сравнению с периодом полураспада $T_{1/2}$ данного радиоизотопа ($\Delta t <<$ $T_{1/2}$), тогда число нераспавшихся ядер N можно считать практически постоянным в течение всего времени Δt и равным их начальному числу N_0. Следовательно, число распавшихся ядер ΔN можно находить по формуле $\Delta N = \lambda N_0 \Delta t$.
- Радиоактивный распад одного радиоактивного вещества (дочернего), взятого в смеси с другим радиоактивным веществом (материнским), из которого оно возникает.
- В этом случае пользуются соотношением, выражающим закон изменения со временем числа ядер дочернего вещества.
  $$N_2(t) = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$
- Обратим внимание на особый случай: если период полураспада $(T_{1/2})_1$ материнского вещества существенно превышает период полураспада $(T_{1/2})_2$ дочернего вещества, т.е. $(T_{1/2})_1$ >> $(T_{1/2})_2$, то по истечении некоторого промежутка времени устанавливается радиоактивное равновесие между этими веществами. При этом число ежесекундно распадающихся ядер дочернего вещества равно числу вновь образующихся ядер этого же вещества в результате распада ядер материнского вещества. Поскольку активности обоих веществ становятся одинаковыми, имеет место соотношение
  $$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{(T_{1/2})_1}{(T_{1/2})_2}.$$
- В некоторых задачах требуется найти число атомов N, содержащихся в данной массе m некоторого радиоизотопа ${}^{A}_{Z}X$ (здесь X – химический символ данного элемента; Z – атомный номер, равный числу протонов в ядре; A – массовое число, равное суммарному числу протонов и

нейтронов, т. е. числу нуклонов в ядре). Для этого пользуются соотношением

$$N = N_A \cdot \nu = N_A \cdot (m / \mu),$$

где N_A – постоянная Авогадро; ν – число молей, содержащихся в данном препарате; μ – молярная масса изотопа. Напомним, что между молярной массой μ изотопа и его относительной атомной массой M существует соотношение $\mu = M \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

- Следует иметь в виду, что для любого изотопа величина M, выражается числом, весьма близким к его массовому числу A, т. е. $\mu \approx A \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

8.3.3. Алгоритм решения задач по разделам «Энергия связи ядра», «Удельная энергия связи»

1. Выписать соответствующую формулу для расчёта энергии связи или удельной энергии связи ядра.
2. Взять из таблицы массы: протона, нейтрона и атомов химических элементов, участвующих в реакции.
3. Табличные значения подставить в соответствующую формулу или формулы.
4. Произвести расчёт.
5. Написать ответ.

8.3.4. Примеры решения задач по разделам «Энергия связи ядра», «Удельная энергия связи»

Пример 8.3.1. Сравнить удельную энергию связи трития ${}_1^3\mathrm{H}$ и легкого изотопа гелия ${}_2^3\mathrm{He}$.

Дано:

${}_1^3\mathrm{H}$,

${}_2^3\mathrm{He}$.

Определить:

$\left(\dfrac{E_{CB}}{A}\right)_H = ?$

$$\left(\frac{E_{CB}}{A}\right)_{He} = ?$$

Решение

1. Энергия связи ядра рассчитывается по формуле

$$E_{CB} = c^2\{[Zm_p + (A-Z)m_n] - m_Я\}. \qquad (1)$$

2. Удельная энергия связи ядра рассчитывается на один нуклон в ядре:

$$\left(\frac{E_{CB}}{A}\right). \qquad (2)$$

3. Напишем формулы для расчета удельной энергии связи трития и легкого изотопа гелия. Эти формулы будут являться решением данной задачи в общем виде.

$$\left(\frac{E_{CB}}{A}\right)_H = \frac{c^2\{[1\cdot m_p + (3-1)m_n] - m_H\}}{3}, \qquad (3)$$

$$\left(\frac{E_{CB}}{A}\right)_{He} = \frac{c^2\{[2\cdot m_p + (3-2)m_n] - m_{He}\}}{3}. \qquad (4)$$

4. Табличные значения масс нуклонов и атомов:

$$m_p = 1{,}00727647 \text{ а.е.м.},$$

$$m_n = 1{,}008665012 \text{ а.е.м.},$$

$$m_H = 3{,}01605 \text{ а.е.м.},$$

$$m_{He} = 3{,}01603 \text{ а.е.м..}$$

5. Подставим табличные значения в формулы (3) и (4) и произведем расчет:

$$\left(\frac{E_{CB}}{A}\right)_H = \frac{931{,}4\{[1\cdot 1{,}00727647 + (3-1)1{,}008665012] - 3{,}01605\}}{3} =$$

$$= 2{,}656477 \text{ МэВ}.$$

$$\left(\frac{E_{CB}}{A}\right)_{He} = \frac{931{,}4\{[2\cdot 1{,}00727647 + (3-2)1{,}008665012] - 3{,}01603\}}{3} =$$

$= 2,2328$ МэВ.
Расчет проведен во внесистемных единицах.

6. Удельная энергия связи трития больше удельной энергии связи легкого гелия. Ядро трития прочнее ядра легкого гелия.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{E_{CB}}{A}\right)_H = 2,656477 \text{ МэВ}; \quad \left(\frac{E_{CB}}{A}\right)_{He} = 2,2328 \text{ МэВ}.$$

8.3.5. Алгоритм решения задач в разделе «Радиоактивность»

1. Записать кинетический закон радиоактивного распада.
2. Выписать формулы и математические выражения для активности радиоактивного препарата, связи активности с периодом полураспада и постоянной распада и средним временем жизни.
3. Преобразовать закон радиоактивного распада к условиям конкретной задачи.
4. Решить полученное уравнение или уравнения относительно искомых величин.
5. Произвести вычисления.
6. Написать ответ.

8.3.6. Примеры решения задач в разделе «Радиоактивность»

<u>Пример 8.3.2.</u> Найти среднюю продолжительность жизни τ ядер радиоактивного изотопа кобальта ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$.

Дано:
${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$

Опр: $\tau = ?$

Решение

1. Среднее время жизни ядра радиоактивного изотопа найдем по формуле

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, \qquad (1)$$

где λ – постоянная радиоактивного распада.

2. Постоянная радиоактивного распада связана с периодом полураспада соотношением

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \qquad (2)$$

где $T_{1/2}$ – период полураспада.

3. Подставим (2) в (1) получим расчетную формулу, т.е. решение в общем виде:

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}. \qquad (3)$$

4. Из таблицы выпишем период полураспада кобальта $^{60}_{27}\mathrm{Co}$, который равен $T_{1/2} = 5{,}3$ года.

5. Подставим это значение периода полураспада в общее решение (3) и произведем расчет среднего времени жизни:

$$\tau = \frac{5{,}3}{0{,}69} = 7{,}68 \text{ года.}$$

Ответ: $\tau = 7{,}68$ года.

Пример 8.3.3. Определить начальную активность A_0 радиоактивного магния $^{27}_{12}\mathrm{Mg}$ массой $m = 0{,}2$ мкг, а также активность A по истечении времени $t = 1$ ч. Предполагается, что все атомы изотопа радиоактивны.

Дано:	СИ
$m = 0{,}2$ мкг	$2 \cdot 10^{-10}$кг,
$t = 1$ч.	3600 с.
Определить: A_0 =?, A =?	

Решение

1. Начальная активность изотопа:

$$A_0 = \lambda N_0, \qquad (1)$$

где λ – постоянная радиоактивного распада; N_0 – количество атомов изотопа в начальный момент ($t = 0$).

2. Выразим постоянную радиоактивного распада λ через период полураспада $T_{1/2}$:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \qquad (2)$$

3. Найдем количество атомов изотопа в начальный момент времени:

$$N_0 = \frac{m}{\mu} N_A. \qquad (3)$$

4. Найдем решение в общем виде для начальной активности препарата, подставив в формулу (1) выражения (2) и (3):

$$A_0 = \frac{mN_A}{\mu T_{1/2}} \ln 2. \qquad (4)$$

5. Подставим входящие в эту формулу величины в СИ. Молярную массу: $\mu = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, и период полураспада: $T_{1/2} = 10$ мин = 600 с.

6. Произведем расчет начальной активности радиоактивного препарата:

$$A_0 = \frac{2 \cdot 10^{-10} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3} \cdot 600} \ln 2 = 5{,}15 \cdot 10^{12} \text{ Бк}.$$

7. Активность изотопа уменьшается со временем по закону:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \qquad (5)$$

8. Заменим в формуле (5) постоянную распада λ ее выражением $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$,

получим:

$$A = A_0 e^{-\ln 2 \cdot \frac{t}{T_{1/2}}} = A_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

9. Так как $e^{\ln 2} = 2$, найдем решение в общем виде:

$$A = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}}. \qquad (6)$$

10.Сделаем подстановку числовых значений и произведем расчет активности препарата к моменту времени t:

$$A = \frac{5{,}15 \cdot 10^{12}}{2^{3600/600}} = 8{,}05 \cdot 10^{10} \text{ Бк.}$$

Ответ: A_0 =5,15·10^{12} Бк; A =8,05·10^{10} Бк.

8.3.7. Алгоритм решения задач в разделе «Ядерные реакции»

1. Записать уравнение ядерной реакции.
2. Используя закон сохранения электрического заряда, найти электрический заряд неизвестной частицы или ядра.
3. Используя закон сохранения массового числа при ядерной реакции, определить массовое число родившейся частицы или дочернего ядра.
4. Определить появившуюся частицу или дочернее ядро, воспользовавшись полученными значениями порядкового номера элемента и его массового числа.
5. При необходимости рассчитать энергетический выход реакции.
6. Написать ответ.

8.3.8. Примеры решения задач в разделе «Ядерные реакции»

<u>Пример 8.3.4</u>. Найти энергию ядерной реакции:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + ^{1}_{4}\mathrm{H} \to ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{6}_{3}\mathrm{Li}\,.$$

Дано:	
Уравнение реакции.	
Определить: $Q = ?$	

Решение

1. Энергию ядерной реакции найдем по формуле (это решение в общем виде):

$$Q = 931{,}5\left[\left(m_{Be} + m_H\right) - \left(m_{He} + m_{Li}\right)\right] \text{ МэВ.} \qquad (1)$$

2. При числовом подсчете массы ядер заменим массами нейтральных атомов, взятых из таблицы:

$$m_{Be} = 9{,}01219 \text{ а.е.м.,}$$
$$m_{He} = 4{,}00260 \text{ а.е.м.,}$$
$$m_H = 1{,}00783 \text{ а.е.м.,}$$

$$m_{Li} = 6{,}01513 \text{ а.е.м..}$$

3. Подставим значения масс в формулу (1):

$$Q = 931{,}4[(9{,}01219 + 1{,}00783) - (4{,}00260 + 6{,}01513)] = 2{,}13 \text{ МэВ}.$$

4. Реакция идет с выделением тепла, поскольку $Q > 0$.

Ответ: $Q = 2{,}13$ МэВ.

8.3.9. Задачи для самостоятельного решения

Пример 8.3.5. Вычислить энергию связи E_{CB1} и E_{CB2} соответственно ядра дейтерия ${}_1^2\text{H}$ и трития ${}_1^3\text{H}$.

Ответ: E_{CB1} = 2,22 МэВ; E_{CB2} = 8,47 МэВ.

Пример 8.3.6. Определить число N_1 и N_2 атомов радиоактивного препарата йода ${}_{53}^{131}\text{I}$ массой m=0,5·10^{-3} г, распавшихся соответственно в течение времени: 1) t_1 = 1 мин; 2) t_2 = 7 суток.

Ответ: 1) N_1=1,38·10^{11}; 2) N_2=1,04·10^{15}.

Пример 8.3.7. Вычислить энергетический эффект Q реакции

$${}_4^9\text{Be} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_6^{12}\text{C} + {}_0^1 n .$$

Ответ: Q=5,71 МэВ.

Пример 8.3.8. Какова вероятность W того, что данный атом в изотопе радиоактивного йода ${}_{53}^{131}\text{I}$ распадется в течение ближайшей секунды?

Ответ: W=10^{-8}.

8.4. Физика элементарных частиц

8.4.1. Основные понятия, формулы и законы

Полная энергия, импульс релятивистской частицы

- Полная энергия релятивистской частицы:

$$E = m_0 c^2 + T . \qquad (8.4.1)$$

- Импульс релятивистской частицы:

$$pc = \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)} , \qquad (8.4.2)$$

где T – кинетическая энергия частицы, p – импульс частиц, c – скорость света в вакууме, m_0 – масса покоя частицы.

- Инвариантная величина при столкновении:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 , \qquad (8.4.3)$$

где E и p – соответственно полная энергия и импульс системы до столкновения; m_0 – масса покоя образовавшейся частицы.

- Пороговая (минимальная) кинетическая энергия частицы m, налетающей на покоящуюся частицу M, для возбуждения эндоэнергетической реакции $m + M \rightarrow m_1 + m_2 + ...$:

$$T_{ПОР} = \frac{(m_1 + m_2 + ...)^2 - (m + M)^2}{2M} c^2 , \qquad (8.4.4)$$

где $m, M, m_1, m_2, ...$ – массы покоя соответствующих частиц.

Квантовые числа элементарных частиц

- Квантовые числа, приписываемые элементарным частицам:

  Q - электрический заряд,
  L - лептонный заряд,
  B - барионный заряд,
  T - изотопический спин,
  T_Z - проекция изотопического спина,
  S - странность, $S = 2 < Q > -B$, (8.4.5)
  Y - гиперзаряд, $\mathrm{Y} = B + S$, $\mathrm{Y} = 2\langle Q \rangle$. (8.4.6)

- Связь между квантовыми числами сильно взаимодействующих частиц:

$$Q = T_Z + \frac{Y}{2} = T_Z + \frac{B+S}{2}. \qquad (8.4.7)$$

- При взаимодействии частиц выполняются законы сохранения Q, L и B зарядов.
- В сильных взаимодействиях выполняются законы сохранения зарядов Q, L и B, странности S (или Y), изотопического спина T и его проекции T_Z.

8.4.2. Алгоритм решения задач

1. Установить, какая это частица: релятивистская или классическая.
2. Выяснить, какие законы сохранения выполняются в процессе, заданном условиями задачи.
3. Написать уравнение реакции или распада.
4. Выписать соответствующие формулы.
5. Полученную систему уравнений или уравнение решить относительно искомой величины.

8.4.3. Примеры решения задач

<u>Пример 8.4.1</u>. Найти наибольшую скорость позитрона, который рождается при радиоактивном распаде свободного покоящегося антинейтрона.

Дано:
Покоящийся антинейтрон
Определить: v =?

Решение

1. В основе решения данной задачи лежит закон сохранения полной энергии.
2. Полная максимальная энергия возникшего позитрона равна разности энергий покоя антинейтрона и антипротона
$$E_{e^+} = E_{\tilde{n}} - E_{\tilde{p}}. \qquad (1)$$
3. Энергия позитрона
$$E_{e^+} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (2)$$
где m_{e^+} – масса покоя позитрона; v – скорость позитрона; c – скорость света в вакууме.

4. Энергия покоя антинейтрона

$$E_{\tilde{n}} = m_{\tilde{n}} \cdot c^2 . \qquad (3)$$

5. Энергия покоя антипротона

$$E_{\tilde{p}} = m_{\tilde{p}} \cdot c^2 . \qquad (4)$$

6. Объединим формулы (1) – (4) получим

$$\frac{m_{e^+} c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \left(m_{\tilde{n}} - m_{\tilde{p}}\right) \cdot c^2 . \qquad (5)$$

7. Найдем решение в общем виде. Для этого решим уравнение (5) относительно скорости позитрона

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_e}{m_n - m_p}\right)^2} . \qquad (6)$$

8. Подставим табличные значения масс частиц в (6) и найдем скорость позитрона

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_e}{m_n - m_p}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}511}{939{,}57 - 938{,}28}\right)^2} = 0{,}92 \cdot c .$$

Ответ: Скорость позитрона составляет 92% скорости света в вакууме.

Пример 8.4.2. Какие законы сохранения нарушились бы в ходе распада свободного протона по схеме

$$p \rightarrow n + e^- ?$$

Дано:
протон - p,
нейтрон - n,
электрон - e^-.

Определить:
Какие законы сохранения выполняются?

Решение

1. В указанной схеме распада участвуют: барионы (протон и нейтрон) и лептон (электрон).

2. Необходимо проверить законы сохранения квантовых чисел и свойств частиц, а также фундаментальный закон сохранения энергии:

- Закон сохранения барионного заряда *выполняется*, так как слева барионный заряд протона равен (+1), справа барионный заряд нейтрона равен (+1), барионный заряд электрона равен (0). Напишем сказанное в виде соотношения: (+1)=(+1)+(0).
- Аналогично рассуждая, проверим закон сохранения лептонного заряда – (0)≠(0)+(+1). Этот закон *не выполняется*.
- Закон сохранения электрического заряда. Слева – положительный элементарный заряд протона. Справа – только отрицательный элементарный заряд электрона (нейтрон не имеет электрического заряда). (+1)≠(0)+(-1). Закон сохранения электрического заряда *не выполняется*.
- Закон сохранения момента импульса. Каждая из элементарных частиц имеет спин равный ½. Подсчитаем для данной схемы распада спин слева и справа в реакции: 1/2 ≠ 1/2+1/2. Закон *не выполняется.*
- Закон сохранения энергии. Энергия частиц пропорциональна их массам. Известно, что масса нейтрона на 2,5 массы электрона больше массы протона. Учитывая сказанное, запишем соотношение: $m_p \neq (m_p + 2{,}5m_e) + m_e$. Закон сохранения энергии *не выполняется*.

Ответ: Законы сохранения энергии, момента импульса, электрического и лептонного зарядов *не выполняются*.

Пример 8.4.3. Протоны с кинетической энергией T налетают на неподвижную водородную мишень. Найти пороговое значение кинетической энергии $T_{ПОР}$, для реакции

$$p + p \to p + p + \pi^0 .$$

Дано:
Схема реакции

Определить:
$T_{ПОР}$ =?

Решение

1. В данной реакции первичными частицами являются два протона, конечными два протона и мезон.
2. Пороговую энергию для такой реакции следует искать по формуле

$$T_{ПОР} = \frac{(m_p + m_p + m_\pi)^2 - (m_p + m_p)^2}{2m_p} c^2, \qquad (1)$$

где m_p и m_π – соответственно массы покоящегося протона и π^0-мезона.

3. Учтем массы взаимодействующих и возникших в результате реакции частиц и тем самым получим решение в общем виде:

$$T_{ПОР} = \frac{(4m_p + m_\pi)}{2m_p} m_\pi c^2. \qquad (2)$$

4. Вычислим пороговую энергию. Воспользуемся внесистемными единицами:

$$T_{ПОР} = 931{,}4 \frac{(4 \cdot 1{,}007276 + 0{,}14489)}{2 \cdot 1{,}007276} 0{,}14489 = 0{,}2798 \text{ ГэВ}.$$

Ответ: $T_{ПОР} = 0{,}28$ ГэВ.

Пример 8.4.4. Два протона с энергией E = 50 ГэВ каждый движутся в системе *К.* навстречу друг другу и претерпевают лобовое соударение. Рассмотреть этот процесс в системе K', в которой один из протонов неподвижен; определить энергию E' другого протона (энергия покоя протона E_0 = 0,938 ГэВ). Какой вывод можно сделать из полученного результата?

Дано:
E = 50 ГэВ,
E_0 = 0,938 ГэВ.

Определить:
1. Энергию E'.
2. Сделать анализ решения.

Решение

1. В системе *К* протоны движутся с одинаковыми по модулю скоростями v. Для того чтобы 1-й протон покоился в системе *К′,* эта система должна двигаться относительно системы *К* со скоростью V = v. Следовательно,

$$V = v. \qquad (1)$$

2. В системе К энергия 2-го протона равна

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{E_0}{x}\,, \qquad (2)$$

где m – масса; E_0 – энергия покоя протона. Ввели обозначение:

$$1-v^2/c^2=x^2\,,$$

откуда найдем

$$v^2/c^2=1-x^2\,. \qquad (3)$$

3. Проекция скорости 2-го протона на ось x системы K

$$v_x=-v\,. \qquad (4)$$

4. Для нахождения проекции скорости 2-го протона на ось x' системы K' воспользуемся формулой преобразования скоростей:

$$v'_{x'}=\frac{v_x-V}{1-Vv_x/c^2}\,. \qquad (5)$$

С учетом (1) и (4) получается соотношение

$$-v'=\frac{-v-v}{1-v(-v)/c^2}=\frac{-2v}{1+v^2/c^2}\,,$$

откуда

$$\frac{v'}{c}=\frac{2v/c}{1+v^2/c^2}=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{2-x^2}$$

(мы воспользовались соотношением (3)). В соответствии с формулой (5)

$$1-\frac{(v')^2}{c^2}=\left(\frac{x^2}{2-x^2}\right)^2. \qquad (6)$$

5. Подставив в формулу

$$E'=\frac{E_0}{\sqrt{1-(v')^2/c^2}}$$

значение (6) для $1-(v')^2/c^2$, придем к выражению

$$E'=\frac{E_0(2-x^2)}{x^2}\,. \qquad (7)$$

6. Взяв отношение выражений (7) и (2), найдем, что

$$E'=E\,\frac{2-x^2}{x}\,.$$

7. Выразив согласно (2) x через отношение E_0/E, получим ответ:

$$E' = E\frac{2-\left(E_0/E\right)^2}{E_0/E} = \frac{2E^2}{E_0} - E_0 .$$

8. Подстановка числовых значений:

$$E' = \frac{2\cdot 50^2}{0{,}938} - 0{,}938 = 53\cdot 10^2 \text{ ГэВ}.$$

Ответ: Столкновение двух встречных пучков протонов, ускоренных до энергии 50 ГэВ, эквивалентно бомбардировке мишени из неподвижных протонов пучком протонов, ускоренных до энергии 5300 ГэВ.

8.4.4. Задачи для самостоятельного решения

Пример 8.4.5. Найти средний путь l_{cp}, проходимый π–мезонами с кинетической энергией, которая в η = 1,2 раза превышает их энергию покоя. Среднее время жизни очень медленных π–мезонов τ_0 =25,5 нс.

Ответ: l_{cp} =15 м.

Пример 8.4.6. Покоившаяся нейтральная частица распалась на протон и с кинетической энергией T =5,3 МэВ и π^-–мезон. Найти массу этой частицы. Как она называется?

Ответ: m = 1115 МэВ; Λ –частица.

Пример 8.4.7. Ускоренный электрон поглощается неподвижным протоном, при этом образуется нейтрон. Написать уравнение реакции. Полагая, что возникший нейтрон остается в покое, вычислить минимальную кинетическую энергию электрона, при которой реакция возможна.

Ответ: ${}^{0}_{-1}e + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{0}\nu$; $T_{ПОР}$ = 0,24 МэВ.

Пример 8.4.8. Определить пороговую энергию γ–кванта для образования пары электрон - позитрон в кулоновском поле ядра.

Ответ: E_n = 1,02 МэВ.

Учебное издание

**ФИЗИКА:ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМА.
ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА.
ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА.
ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ**

Автор Гущин Владимир Силантьевич

Редактор Н.П.Кубыщенко

Компьютерная верстка: Гущин В.С.

Подписано в печать 19.07.2006 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ. л. 3,08
Уч.-изд. л.2,82 Тираж Заказ Цена “С”

Издательство УМЦ УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 17