Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ЛАБОРАТОРИЯХ ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА

Методические указания для студентов всех форм обучения для всех специальностей

Екатеринбург
УрФУ
2010

УДК 53.082.07

Составители: В.А. Овчинников, Ю.Г. Карпов, А.А. Повзнер

Научный редактор проф., д-р физ.- мат. наук Ф.А. Сидоренко

Математическая обработка результатов измерений в лабораториях физического практикума: методические указания / сост. В.А. Овчинников, Ю.Г. Карпов, А.А. Повзнер. Екатеринбург: УрФУ, 2010. 20 с.

В работе приведена классификация погрешностей результатов измерений, изложены основы статистического метода оценки доверительных границ случайных и систематических погрешностей, даны практические рекомендации по математической обработке экспериментальных результатов лабораторных работ физического практикума. Приведены примеры обработки результатов измерений. Предназначено для студентов всех специальностей всех форм обучения.

Подготовлено кафедрой физики

Принятые обозначения

X – случайная физическая величина (её обозначение);

x_0 – истинное значение физической величины X;

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ – случайные значения измеряемой физической величины X;

n – число результатов наблюдений;

$\bar{x}$ – среднее арифметическое значение физической величины X;

P – вероятность;

$S_{\bar{x}}$ – среднее квадратическое отклонение среднего арифметического;

$t_{p,n}$ – коэффициент Стьюдента;

ε – доверительная граница случайной погрешности результата измерения;

θ – доверительная граница неисключённой систематической погрешности результата измерения;

Δ – доверительная граница абсолютной погрешности результата измерения;

γ – доверительная граница относительной погрешности результата измерения

1. Измерения физических величин. Погрешности измерений

Измерение физической величины – это нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств – приборов, установок и т. д.

По способу получения значения измеряемой величины различают прямые и косвенные измерения.

Прямое измерение – измерение, при котором искомое значение величины получают непосредственно из опытных данных. Например, прямыми являются измерения массы с помощью весов, длины с помощью линейки и т.д.

Косвенное измерение – измерение, при котором искомое значение величины находят вычислением на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, определяемыми в результате прямых измерений. Так, при определении плотности тела правильной формы проводят прямые измерения его массы, размеров, а затем уже рассчитывают плотность.

Например, для тела цилиндрической формы плотность р рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h},$$

где *m* – масса цилиндра, *d* – диаметр, *h* – высота.

Величины *d, m* и *h* определяют в результате прямых измерений.

В силу ряда причин результат измерения любой физической величины не совпадает с ее истинным значением. Отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины называется ***погрешностью измерения.*** Задачей любого измерения является не только установление наиболее точного значения измеряемой величины, но и оценка границ возможных погрешностей.

По форме представления различают абсолютные и относительные погрешности.

Абсолютная погрешность Δ_0 – разность между измеренным x и x_0 истинным значениями измеряемой величины;

$$\Delta_0 = x - x_0 \qquad (1)$$

Относительная погрешность γ_0 - отношение абсолютной погрешности к истинному значению x_0 измеряемой величины:

$$\gamma_0 = \frac{\Delta_0}{x_0} \quad \text{– в относительных единицах}$$

или

$$\gamma_0 = \frac{\Delta_0}{x_0} \cdot 100\ \% \quad \text{– в процентах.}$$

Поскольку истинное значение измеряемой величины остается неизвестным, на практике можно найти лишь приближенную оценку погрешности.

По причинам возникновения различают следующие основные виды погрешностей:

метода измерений (обусловлены несовершенством метода измерений),

средств измерений (обусловлены техническими недостатками средств измерений),

отсчитывания (обусловлены округлением показаний средств измерений).

По характеру изменения при повторных измерениях погрешность любого измерения складывается из двух составляющих – случайной и систематической.

Пусть мы измерили какую-либо физическую величин X несколько раз. Как показывает опыт, полученные результаты будут между собой несколько различаться. Это различие обусловлено тем, что условия измерений и сам объект измерения с течением времени случайным, неконтролируемым образом изменяются. Поэтому считают, что различие результатов наблюдений обусловлено случайными погрешностями.

Случайная погрешность – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях данной величины.

Систематическая погрешность – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях данной величины.

2. Оценка границ случайной погрешности прямого измерения

Пусть в некоторой серии опытов получены *n* значений физической величины *X:* x_1, x_2. ... , x_n. Каждое отдельное измерение называют наблюдением; значения x_1,x_2. ... ,x_n – ***результатами наблюдений***. Если считать, что систематические погрешности отсутствуют, то, как показывает теория вероятностей, наиболее близким к неизвестному истинному значению x_0 этой величины является ***среднее арифметическое*** этих значений.

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}. \qquad (2)$$

Можно ожидать (и это доказывается методами математической статистики), что при увеличении числа наблюдений *n* среднее арифметическое $\overline{X}$ должно приближаться к истинному значению x_0 измеряемой величины, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x} = x_0$$

Итак, для того чтобы определить истинное значение измеряемой физической величины *X,* необходимо провести бесконечное число ее наблюдений и найти среднее арифметическое полученных результатов. Это невыполнимая задача. В любом реальном эксперименте число наблюдений конечно, поэтому среднее арифметическое их результатов отличается от истинного значения. Задача исследователя - оценить для данной совокупности наблюдений возможные отклонения $\overline{x}$ от x_0. Это делается с применением математического аппарата теории вероятностей. Познакомимся с некоторыми ее понятиями.

При проведении большой серии наблюдений некоторой величины *X* чаще всего встречаются результаты, довольно близкие к ее истинному значению x_0. Чем больше случайное значение x отличается от истинного x_0, тем реже оно встречается. Выделим среди возможных результатов наблюдений некоторый интервал Δx, Пусть из n проведенных наблюдений Δn дали результаты, лежащие в этом интервале. ***Вероятность*** попадания результата наблюдения x в интервал Δx определяется выражением

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta n}{n}.$$

Если данная величина X непрерывна, то существует отличная от нуля вероятность dP попадания результата отдельного наблюдения в любой элементарный интервал dx. Эта вероятность в общем случае зависит от ширины интервала dx и от того, в окрестности какого значения x выбран этот интервал, т.е.

$$dP=f(x)dx.$$

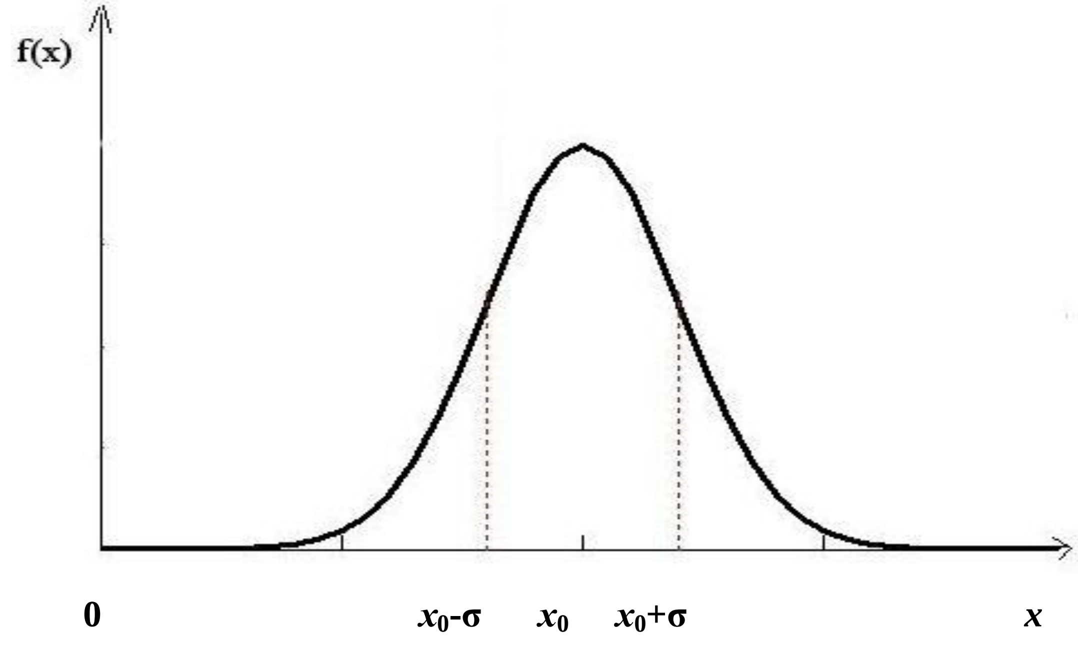
Функция $f(x)$ называется ***плотностью вероятности,*** или ***плотностью функции распределения*** случайной величины X.

Очень часто при измерениях физических величин распределение результатов наблюдений подчиняется так называемому ***нормальному,*** или ***гауссову*** закону

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}} \; e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \qquad (3)$$

График этой зависимости представлен на рисунке.

Параметр σ^2 называется дисперсией распределения, а σ – средним квадратическим отклонением. Этот параметр характеризует разброс значений измеряемой величины относительно ее истинного значения x_0: чем больше σ, тем больше этот разброс.



В теории вероятностей доказывается, что если будет проведена бесконечно большая серия наблюдений величины X и если результаты будут распределены по нормальному закону, то вероятность того, что результат x каждого отдельного наблюдения попадает в интервал от $x_0 - \sigma$ до $x_0 + \sigma$ или того, что случайная погрешность не превысит значения $\pm\sigma$, равна $P = 0{,}6827$ Вероятности попадания результатов наблюдений в более широкие интервалы $x_0 \pm 2\sigma$ и $x_0 \pm 3\sigma$ равны соответственно 0,9545 и 0,9975. Случайные погрешности в этих случаях с вероятностью 0,9545 и 0,9975 не превышают значений $\pm 2\sigma$ и $\pm 3\sigma$.

Вероятность попадания результатов наблюдений в заданный интервал значений называется ***доверительной вероятностью,*** сам интервал – ***доверительным интервалом,*** границы погрешностей – ***доверительными границами погрешностей.*** Так, в первом из рассмотренных примеров доверительный интервал равен $x_0 \pm\sigma$, доверительная вероятность $P = 0{,}6827$.

Для нахождения σ необходимо провести бесконечно большое число наблюдений и построить *f(x).* В реальных условиях число наблюдений конечно, поэтому можно найти лишь приближенную оценку σ. Эта оценка называется выборочным средним квадратическим отклонением S_X результата отдельного наблюдения и вычисляется по формуле

$$S_x = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2}{n-1}} \qquad (4)$$

где $\bar{x}$ – среднее арифметическое значение величины X для данной выборки (конечной серии) наблюдений.

Таким образом, проведя конечную серию наблюдений и определив среднее квадратическое отклонение, можно для любого из результатов наблюдений указать с определенной вероятностью доверительный интервал значений и доверительные границы случайной погрешности.

Однако обычно важнее оценить границы случайной погрешности не результата каждого отдельного наблюдения, а их среднего арифметического $\bar{x}$, которое принято называть ***результатом измерения физической величины*** *X*. Среднее арифметическое $\bar{x}$ также является случайной величиной. Если случайные значения распределены по нормальному закону, то но такому же закону распределены и средние арифметические значения $\bar{x}$. Теория показывает, что отклонение среднего арифметического $\bar{x}$ от истинного значения x_0 характеризуется не величиной S_x, а меньшей величиной $S_{\bar{x}}$, называемой ***средним квадратическим отклонением среднего арифметического:***

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \qquad (5)$$

Определив для данной серии наблюдений $\bar{x}$ и $S_{\bar{x}}$ можно записать окончательный результат в виде

$$X = \bar{x} \pm 2\sigma, \qquad P = 0{,}95$$

т.е. с вероятностью $P = 0{,}95$ найденное значение $\bar{x}$ не отличается от истинного x_0 более чем на $\pm 2\sigma$.

Различие между $S_{\bar{x}}$ и $\sigma_{\bar{x}}$ невелико, а распределение результатов измерений мало отличается от нормального только при достаточно больших значениях *n* (*n* >30). В учебных лабораториях, как правило, ограничиваются небольшим числом наблюдений (3 – 5). В этом случае $S_{\bar{x}}$ и $\sigma_{\bar{x}}$ различаются сильно, поэтому для правильной оценки доверительных границ случайной погрешности вместо целочисленных коэффициентов при $S_{\bar{x}}$ вводятся превышающие их дробные ***коэффициенты Стьюдента.***

Оперируя методами теории вероятностей, английский математик Госсет в вышедшей в 1908 г. под псевдонимом "Стьюдент" работе показал, что в случае небольшого числа наблюдений доверительная граница ε_x случайной погрешности среднего арифметического оценивается по формуле

$$\varepsilon_x = t_{P,n} S_{\bar{x}}, \qquad (6)$$

где $t_{P,n}$ коэффициент Стьюдента, зависящий от принятой доверительной вероятности *P* и числа наблюдений *n* ;

$S_{\bar{x}}$ – среднее квадратическое отклонение среднего арифметического. Значения коэффициентов Стьюдента для доверительной вероятности *P* ~ 0,95 (в учебных лабораториях рекомендуется определять доверительные границы погрешности именно для такой вероятности) приведены в таблице:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{0,95;\,n}$	12,7	4,3	3,18	2,77	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26

3. Оценка границ неисключенной систематической погрешности прямого измерения

В некоторых случаях модуль и знак систематической погрешности известны. Такая погрешность должна быть исключена путем введения соответствующей поправки. Так, если известно, что секундомер отстает на 1с в течение часа, то к его показаниям следует добавлять поправку из расчета 1с на каждый час времени.

Однако имеются такие систематические погрешности, модуль и знак которых неизвестны. Такие погрешности называются неисключенными и должны быть учтены.

В паспорте средства измерения, как правило, указывается ***предел основной погрешности*** (кратко – основная погрешность), т.е. погрешность, которая может возникнуть при использовании этого средства в нормальных условиях (при рекомендуемых температурах, влажности и т.д.). Например, если в паспорте микрометра указано, что предел основной погрешности составляет ±0,004 мм, то это означает, что при измерении линейных размеров какого-либо тела без нарушений правил измерения и в соответствующих условиях основная систематическая погрешность измерения не превышает ±0,004 мм.

Часто предел основной погрешности средства измерения задается классом точности, Класс точности δ средства измерения показывает, сколько процентов от его верхнего предела измерений x_{max} (или номинального значения $x_{\text{ном}}$) составляет предел основной погрешности этого средства:

$$\delta = \frac{\theta_{\text{осн}}}{x_{\max}} 100\%.$$

Электроизмерительные приборы могут иметь следующие классы точности: 0,05;0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Класс точности прибора обычно указывается на шкале прибора. Для виртуальных измерительных приборов класс точности принимается равным 1,0.

Предел основной погрешности прибора одинаков во всем его диапазоне измерений, возможная относительная погрешность зависит от показания прибора. Например, миллиамперметром на I_{max} = 100 мА измерена сила тока / = 20 мА. Класс точности прибора δ = 1,0. Предел основной погрешности составляет

$$\theta_{\text{осн}} = \pm I_{\max} \frac{\delta}{100\%} = \pm 100\text{мА} \frac{1\%}{100\%} = \pm 1\text{мА}$$

возможная относительная основная погрешность указанного в примере показания не превышает

$$\gamma = \pm\frac{\theta_{\text{осн}}}{I} = \pm\frac{1\text{мА}}{20\text{мА}} = \pm 0,05 = \pm 5\%.$$

Наряду с основной погрешностью средства измерений в систематическую погрешность измерения входит также ***погрешность*** отсчитывания $\theta_{\text{отсч.}}$, равная половине цены наименьшего давления шкалы, если отсчет показаний ведется с точностью до целых делений. Погрешность отсчитывания является систематической погрешностью только при однократных измерениях; при многократных измерениях она становится составляющей случайной погрешности, поскольку показания средства измерения в этом случае округляются как в сторону завышения, так и в сторону занижения результатов наблюдений.

Как уже отмечалось, систематическая погрешность может возникнуть и из-за несовершенства метода измерений и по целому ряду других причин. Единого рецепта для оценки погрешности метода и других составляющих систематической погрешности не существует. Обычно они могут быть оценены теоретически или определены в специальных градуировочных опытах.

Итак, составляющими систематической погрешности являются: предел основной погрешности средства измерений $\theta_{\text{осн.}}$; погрешность отсчитывания $\theta_{\text{отсч}}$; погрешность метода $\theta_{\text{м}}$; погрешности, вызванные другими источниками (изменение температуры окружающей среды, изменение влажности и т.д.). При оценке доверительной границы неисключенной систематической погрешности θ_X при $n = 1$ следует учитывать основную погрешность средства измерений $\theta_{\text{осн}}$ и погрешность отсчитывания $\theta_{\text{отсч.}}$; в случае $n>1$ только $\theta_{\text{осн}}$. Погрешность метода $\theta_{\text{м}}$ мы будем учитывать лишь в том случае, если она существенна и задана в описании к лабораторной работе.

Для оценки θ_X также используется теория вероятностей. Согласно этой теории доверительная граница неисключенной систематической погрешности результата измерения при $P = 0,95$ оценивается по формуле

$$\theta_x = \sqrt{\theta^2_{\text{осн}} + \theta^2_{\text{отсч}} + \theta^2_{\text{м}} + \ldots} \qquad (7)$$

4. Оценка границ погрешности результата прямого измерения

После того, как определены доверительные границы случайной и систематической погрешностей, необходимо оценить границы полной погрешности результата измерений. Для этого прежде всего сравнивают доверительную границу θ_X систематической погрешности и среднее квадратическое отклонение $S_{\bar{x}}$ результата измерений.

1. В случае, если $\dfrac{\theta_x}{S_{\bar{x}}} < 0{,}8$, систематической погрешностью по сравнению со случайной пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta_x = \varepsilon_x$,

2. Если $\dfrac{\theta_x}{S_{\bar{x}}} > 8{,}0$, то случайной погрешностью по сравнению с систематической пренебрегают и принимают , что граница результата $\Delta_x = \theta_x$,

3. Если ни одно из этих неравенств не выполняется, т.е. $0{,}8 < \dfrac{\theta_x}{S_{\bar{x}}} < 8{,}0$, то необходимо учитывать обе составляющие погрешности измерения, В этом случае доверительную границу погрешности результата оценивают по формуле

$$\Delta_x = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \theta_x^2}. \tag{8}$$

После того, как граница погрешности результата измерений A_x определена, окончательный результат записывают в виде

$$X = \bar{x} \pm \Delta_x, \qquad P = 0{,}95.$$

Величины $\bar{x}$ и Δ_x должны быть согласованы по точности: они должны содержать последнюю значащую цифру в одном и том же разряде. Если, например, $\bar{x}$ = 64,538 мм и Δ_x = 0,028 мм, необходимо округлить Δ_x до первой значащей цифры: Δ_x = 0,03 мм, а затем и $\bar{x}$ округлить до цифры того десятичного разряда, которым выражена погрешность: $\bar{x}$ = 64,54 мм. Окончательный результат измерения записывают в виде

$$X = (64{,}54 \pm 0{,}03)\ \text{мм}, \qquad P - 0{,}95.$$

5. Оценка границ погрешности косвенного измерения

При косвенном измерении значение искомой величины Y находят по результатам прямых измерений величин X_1, X_2,..,X_m, которые связаны с Yизвестной зависимостью

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_m) \tag{9}$$

Проведя серии прямых наблюдений величин X_1, X_2, ... , X_m, можно найти их оценки, т.е. средние арифметические $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}$, а также определить доверительные границы погрешностей результатов их измерений: $\Delta_{X1}, \Delta_{X2}, \ldots, \Delta_{Xm}$ – Наиболее вероятным значением Y следует считать $\overline{y}$, которое получается, если в формулу (9) подставить средние значения аргументов X_1, X_2 ..., X_m.

$$Y = \overline{y} = f(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_m}) \tag{10}$$

Теория вероятностей показывает, что когда погрешности измеряемых аргументов не зависят друг от друга, доверительная граница относительной погрешности y измерения величины Y оценивается по формуле

$$\gamma = \frac{\Delta_{\overline{y}}}{\overline{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\Delta_{x_1}}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\Delta_{x_2}}{f}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\Delta_{x_m}}{f}\right)^2}, \tag{11}$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ – частная производная функции f по аргументу x_1;

Δ_{x1} – граница погрешности измерения величины X_1.

Учитывая, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{1}{f}$ частная производная по x_1 от $\ln f$, формуле (11) можно придать вид

$$\gamma = \frac{\Delta_y}{\overline{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_i}\Delta_{x_i}\right]^2}\,. \tag{12}$$

Для нахождения границы абсолютной погрешности результата измерения величины Y нужно у умножить на $\overline{y}$:

$$\Delta_y = \gamma \cdot \bar{y} \qquad (13)$$

Естественно, границы всех аргументов X_i должны соответствовать одной и той же доверительной вероятности P = 0,95. Следовательно, граница погрешности косвенного измерения величины Yтакже будет соответствовать этой же доверительной вероятности.

Окончательный результат косвенного измерения записывается в виде

$$Y = \bar{y} \pm \Delta_y \qquad P = 0{,}95.$$

Запись означает: найденное среднее значение $\bar{y}$ величины Yс вероятностью P = 0,95 не отличается от ее истинного значения Yо более чем на $\pm\Delta_y$, или: истинное значение y_0 с вероятностью P = 0,95 заключено в пределах интервала $\bar{y} \pm A_y$.

6. Основные этапы обработки результатов измерений

При математической обработке результата косвенного измерения следует выполнить следующие операции.

1. Для каждой из непосредственно измеряемых величин вычислить:

а) среднее арифметическое результатов наблюдений $\bar{x}$;

б) среднее квадратическое отклонение результата измерения $S_{\bar{x}}$;

в) доверительную границу случайной погрешности результата измерения ε_x;

г) доверительную границу неисключенной систематической погрешности результата измерения θ_x;

д) доверительную границу погрешности результата измерения Δ_x.

2. Записать результат каждого прямого измерения в виде

$$X = \bar{x},$$

$$\Delta_x = \ldots,$$

3. Вычислить наиболее вероятное значение результата косвенного измерения $\bar{y}$.

4. Получить (если она не дается в руководстве к лабораторной работе)

выражение для относительной погрешности γ косвенного измерения и найти ее числовое значение. (При выводе формулы для γ расчетную формулу $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ целесообразно предварительно прологарифмировать).

5. Вычислить доверительную границу абсолютной погрешности Δ_Y результата косвенного измерения:

$$\Delta_Y = \gamma \bar{y}$$

6. Записать окончательный результат измерения

$$Y = \bar{y} \pm \Delta_Y \qquad P = 0{,}95.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Правила приближенных вычислений

1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом десятичных знаков. (Десятичными знаками десятичной дроби называются все ее цифры, стоящие справа от запятой).

Пример. 1,18 + 4,2 = 5,4.

2. При умножении и делении, возведении в степень и извлечении корня в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр, (Значащими цифрами десятичной дроби называются все ее цифры, кроме нулей, стоящих в начале дроби)!

Пример. 74 · 0,0181 = 1,3.

Примечание. При нахождении промежуточных результатов следует брать на одну цифру больше, чем рекомендуют правила 1 и 2 (правило "запасной цифры").

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Пример обработки результатов измерений

Определяется плотность тела правильной геометрической формы. Тело имеет форму цилиндра. Его масса m определяется однократным взвешиванием на аналитических весах, диаметр d измеряется несколько раз микрометром, высота – также несколько раз штангенциркулем.

1. Расчетная формула

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}.$$

2. Средства измерения и их характеристики

Наименование средства	Предел измерений	Цена деления шкалы	Класс точности	Предел основной погрешности $\theta_{осн}$
Весы аналитические	200 г	1 мг/дел	2	±2,5 мг
Микрометр	25 мм	0,01 мм/дел	1	±0,004 мм
Штангенциркуль	125 мм	0,05 мм/дел		±0,05 мм

3.Измерение массы образца

$$m = 18{,}013 \text{ г.}$$

$$\Delta_m = 1{,}1\sqrt{\theta^2_{осн} + \theta^2_{отсч}} = 1{,}1\sqrt{2{,}5^2 + 0{,}5^2} \text{ мг} = 2{,}8 \text{ мг} = 0{,}0028 \text{ г} \qquad P=0{,}95$$

4. Измерение диаметра образца

d, мм	$(d_i - \bar{d})$, мм	$(d_i - \bar{d})^2 \cdot 10^6$, мм^2
14,81	–0,022	484
14,86	0,028	784
14,83	–0,002	4
14,82	–0, 012	144
14,84	0,008	64

$\bar{d} = 14{,}832$ мм. $\qquad \sum\left(d_i - \bar{d}\right)^2 = 14{,}8 \cdot 10^{-4}$ мм^2.

Среднее квадратическое отклонение $S_{\bar{d}}$

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{14{,}8 \cdot 10^{-4}}{5(5-1)}} \text{ мм } = 0{,}0086 \text{ мм}$$

Граница неисключённой систематической погрешности

$$\theta_d = \theta_{осн} = 0{,}004 \text{ мм.}$$

Сравниваем θ_d и $S_{\bar{d}}$

$\frac{\theta_d}{S_{\bar{d}}} = \frac{0{,}004}{0{,}0086} = 0{,}46 < 0{,}8.$ Систематической погрешностью можно пренебречь;

$\Delta_d = \varepsilon_d = t_{P,n} \cdot S_{\bar{d}} = 2{,}77 \cdot 0{,}0086$ мм = 0,024 мм.

Результат измерения диаметра

$$\bar{d} = 14{,}832 \text{ мм,}$$

$$\Delta_d = 0{,}024 \text{ мм,} \qquad P = 0{,}95.$$

5. Измерение высоты образца

h_i, мм	$(h_i - \bar{h})$, мм	$(h_i - \bar{h})^2$, мм^2
37,85	0,06	0,0036
37,75	-0,04	0,0016
37,70	-0,09	0,0081
37,75	-0,04	0,0016
37,90	0,11	0,0121

$\bar{h}$ = 37,79 мм $\qquad \sum(h_i - \bar{h})^2$ = 0,0270 мм^2

$S_{\bar{h}} = \sqrt{\frac{0{,}0270}{5(5-1)}}$ мм =0,037 мм; θ_h = 0,05 мм;

$\frac{\theta_h}{S_{\bar{h}}} = \frac{0{,}05}{0{,}037} = 1{,}4$ Учитываются обе составляющие погрешности.

ε_h = 2.77·0,037 мм =0,10 мм;

$\Delta_h = \sqrt{0{,}10^2 + 0{,}05^2}$ мм = 0,11 мм.

Результат измерения высоты:

$$\bar{h} = 37{,}79 \text{ мм,}$$

$$\Delta_h = 0{,}11 \text{ мм,} \qquad P = 0{,}95$$

6. Расчёт искомой величины в СИ

$$\rho = \frac{4\cdot 18{,}013\cdot 10^{-3}}{3{,}14\cdot (14{,}832\cdot 10^{-3})^2 37{,}79\cdot 10^{-3}} \text{ кг/м}^3 = 2{,}758\cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

(В соответствии с правилами приближённых вычислений в этом, ещё не окончательном, результате сохранена одна запасная цифра).

7. Расчёт доверительной границы погрешности результата измерения плотности.

Прологарифмируем расчётную формулу

$$\ln\rho = \ln 4 + \ln m + \ln \pi - 2\cdot \ln d - \ln h.$$

Найдём частные производные от этого выражения по всем переменным:

$$\frac{\partial}{\partial m}(\ln\rho) = \frac{1}{m}; \quad \frac{\partial}{\partial \pi}(\ln\rho) = -\frac{1}{\pi};$$

$$\frac{\partial}{\partial d}(\ln\rho) = -\frac{2}{d}; \quad \frac{\partial}{\partial h}(\ln\rho) = -\frac{1}{h};$$

Поучим формулу для границы погрешности результата измерения плотности в относительной форме

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\Delta_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta_d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_h}{\bar{h}}\right)^2}\ .$$

Произведём расчёт

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{0{,}0028}{18{,}0}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0016}{3{,}14}\right)^2 + \left(\frac{2\cdot 0{,}024}{14{,}8}\right)^2 + \left(\frac{0{,}11}{37{,}8}\right)^2} = 0{,}0044 = 0{,}44\%$$

Найдём границу абсолютной погрешности результата измерения плотности:

$$\Delta_\rho = 0{,}0044\cdot 2{,}758\cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 0{,}012\cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 0{,}01\cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

(Погрешность окончательного результата должна быть выражена ***одной значащей цифрой***).

8. Результат измерения плотности:

$$\rho = (2{,}76 \pm 0{,}01)\cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \qquad \text{при} \quad P = 0{,}95$$

(Напоминаем: результат измерения искомой величины должен быть округлён до того разряда, которым выражена погрешность).

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ЛАБОРАТОРИЯХ ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА

Составители: **Овчинников** Виктор Алексеевич

Карпов Юрий Григорьевич

Повзнер Александр Александрович

Компьютерный набор *Н. Н. Анохиной*

Подписано в печать 10.10.2010 г. Формат 60× 84 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 1,08.
Уч.- изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ.

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, Мира, 19
rio@mail.ustu.ru

Ризография НИЧ УрФУ
620002, Екатеринбург, Мира, 19